

سلسلة مذكرات

الإبداع

في الرياضيات

الصف الأول الثانوي
الفصل الدراسي الأول

إعداد /

أ/ جميل غالي السيد

مكتبة وسيم

ش.م.م. شارع حسني مبارك خلف الثانوية بنات

01004423597.3943035

مقررة

كلمة الطمّوح تعني إبداع العقل ووصوله إلى مدارك الفهم والذكاء،،

وكلمة **الإبراهيم** تعني العيش على القمة وإستنشاق عزة العالی اللّٰه یرجو وائما

المعالي لا يقنع بغيره ولا يرضى إلا القمة المستحقة عن جرارة ،،،،،

فَارْجُو مِنَ اللَّهِ أَنْ أَكُونَ قَدِمْتَ مَا عَلَى مِنْ خِلَالِ هَذَا الْعَمَلِ الْمَتَوَاضِعِ بَيْنَ أَيْدِيكُمْ

وَاللّٰهُ اَدْعُوا اَنْ يُّوَفِّقَكُمْ اِلٰى مَا نَافِلُوْنَهُ اَنْتُمْ وَوَالِدِيْكُمْ

مع أرق الأمنيات بالنجاح والتميز،،

۱/ جمیل غالی السید

❖ كيف نذاكر مادة الرياضيات:

- نحفظ قوانين الدرس جيدا " بالورقة والقلم "
- نذاكر الأمثلة المحلولة جيدا " بالورقة والقلم "
- نحيد حل الأمثلة المحلولة مرة أخرى دون النظر إلى الإجابة
- نقوم بحل تمارين متنوعة على الدرس

الإلهام

في الرياضيات

أولاً:

الحبر

الوحدة الأولى

الجبر والعلاقات والدوال

- (١) حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد
- (٢) مقدمة عن الأعداد المركبة
- (٣) تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية
- (٤) العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها
- (٥) تكوين المعادلة التربيعية من علم جذراها
- (٦) إشارة الدالة
- (٧) متباينة الدرجة الثانية في مجهول واحد

تمارين عامة علي الوحدة
اختبار تراكمي

(١) حل معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد

نعلم أنه :

- * المعادلة $Px^2 + bx + c = 0$ حيث $P \neq 0$ ، $b \in \mathbb{R}$ ، $c \in \mathbb{R}$ هي معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد في \mathbb{R} . وهذه المعادلة لها حلان " جذران " على الأكثر .
- * جذرا المعادلة " مجموعة حل المعادلة " هو كل عدد حقيقي يحققها .

أولاً : حل معادلة الدرجة الثانية جبرياً :

(١) باستخدام التحليل (٢) باستخدام القانون العام

مثال ١ :- أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :-

- (١) $x^2 - 5x = 0$
- (٢) $x^2 - 3x - 17 = 0$
- (٣) $x^2 - 5x - 6 = 0$
- (٤) $x^2 - 9 = 0$
- (٥) $x^2 - 6x + 9 = 0$
- (٦) $x^2 + 5x - 6 = 0$
- (٧) $x = \frac{5}{2} + 3$

الحل :-

$$(١) \quad x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{إما } x = 0 \\ \text{أو } x - 5 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}$$

$$\therefore \text{ج. ٢} = \{0, 5\}$$

$$(١) \quad x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x = 5$$

$$\text{ج. ٢} = \{0, 5\}$$

$$(٣) \quad x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\therefore \text{ج. ٣} = \{3\}$$

مكتبة وسام
شوين - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات
01004423597.3943035

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 3 \\ \hline 3 \\ 7 \\ \hline 10 \end{array}$$

(18)

"تحلل بالحقص" $0 = 3x^2 - 17x + 6$

$$0 = (3x - 1)(x - 6)$$

$$\begin{array}{l|l} 0 = 3x - 1 & 0 = 1 + 3x \\ 6 = x & 1 = 3x \\ \hline 6 = x & \frac{1}{3} = x \end{array}$$

$\therefore x = \frac{1}{3}, 6$

"خروج بغير حرجية" $0 = x^2 - 9$

$$0 = (x + 3)(x - 3) \iff x = 3 \text{ أو } x = -3$$

$\therefore x = 3, -3$

"تحلل بالقانون العام" $0 = x^2 + 5x - 6$

حيث P معامل x ، b معامل x ، c الحد المطلق
لا بد أن تكون المعادلة في الصورة $Px^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{array}{l|l} 0 = P & \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = x \\ c = -6 & \\ x = -6 & \\ \hline 1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)} & \end{array}$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{(1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)})}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = x$$

$\therefore x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2}$

$0 = 0 + 5x - 6 \iff 5x = 0 + 6 \iff x = \frac{0}{5} + 6$ (17)

$$\begin{array}{l|l} 1 = P & \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = x \\ x = -6 & \\ 0 = -6 & \\ \hline 0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)} & \end{array}$$

\therefore لا يوجد حل للمعادلة

$\Delta \neq 0$

$\therefore \phi$

* * * * * أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات الآتية :-

$$(٤) \quad ٥س - ١٤ = ٨$$

$$(١) \quad ٣س + ٥ = ٠$$

$$(٥) \quad ١ - س = ٠$$

$$(٢) \quad ٣ - س = ٠$$

$$(٦) \quad ٥س + ٥ = ٠$$

$$(٣) \quad ٥س + ٥ = ٠$$

مثال ٥ :- أطلقت قذيفة رأسياً لأعلى بسرعة ١٩,٦ م/ث. ١٠ احسب الفترة الزمنية t بالثانية التي تستغرقها حتى تصل إلى ارتفاع ١٠ م.
حيث t تساوي ٧,١٤ م علماً بأنه العلاقة بين t و h هي $h = ١٩,٦t - ٥t^2$
الحل :-

$$\therefore h = ١٩,٦t - ٥t^2 \quad , \quad f = ٧,١٤ \quad , \quad ١٩,٦ = ٥t$$

$$\Leftrightarrow ١٩,٦ - ٥t = ٣ \quad (٥ \div) \quad \Leftrightarrow ١٩,٦ - ٥t = ٣$$

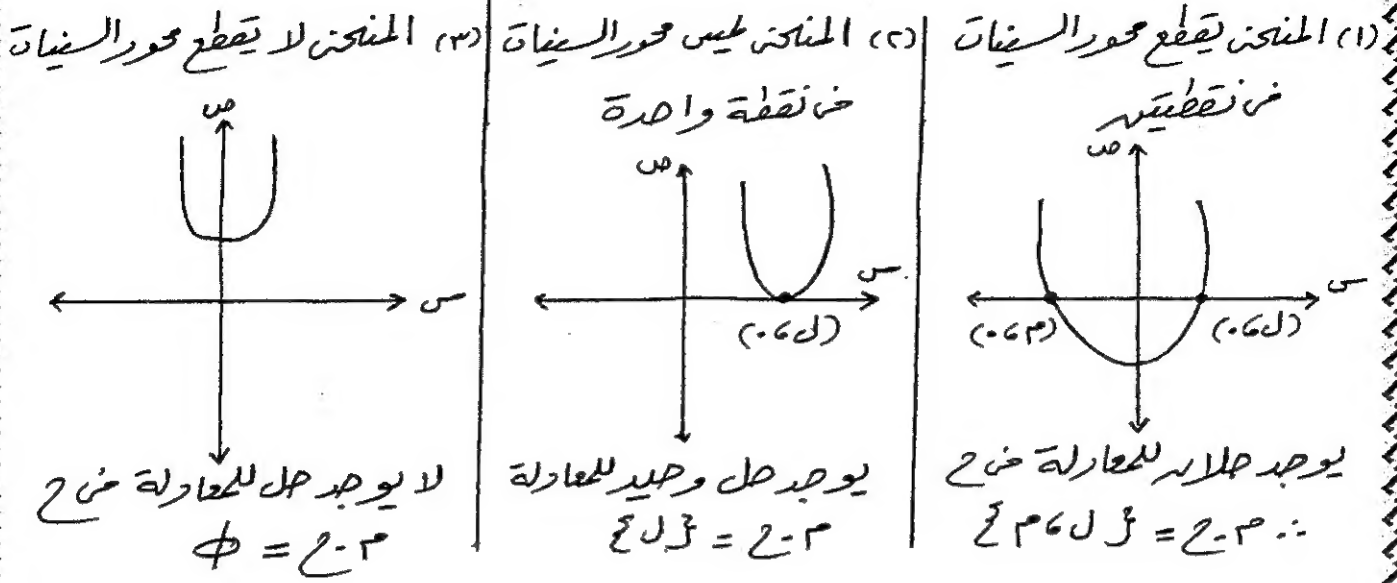
$$\Leftrightarrow ١٩,٦ - ٥t = ٣ \quad \Leftrightarrow ١٩,٦ - ٥t = ٣ \quad \Leftrightarrow ١٩,٦ - ٥t = ٣$$

أي أنه :- القذيفة تصل إلى ارتفاع ٧,١٤ م بعد t ثم تستمر في الحركة لأعلى حتى تصل إلى أقصى ارتفاع ثم تتحرك للأسفل وتعود لنفس الارتفاع بعد t .

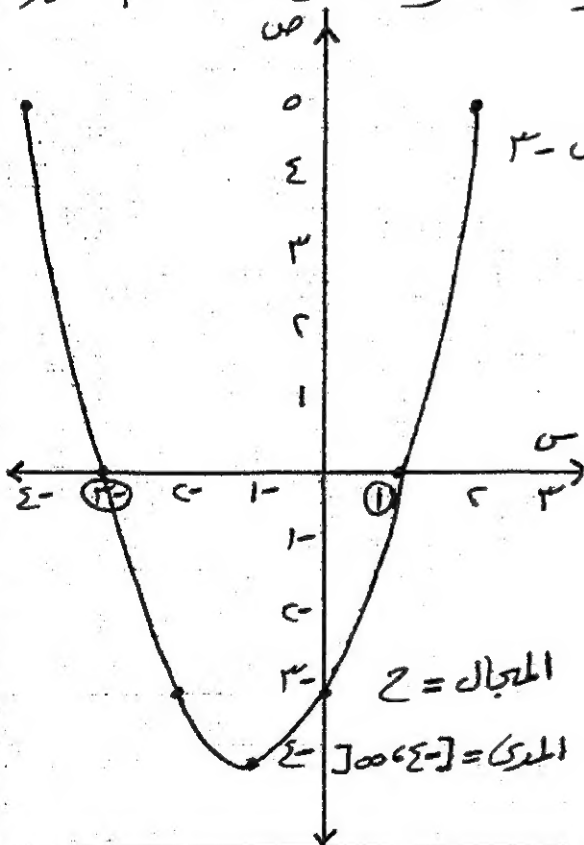
ثانياً : حل معادلة الدرجة الثانية بيانياً :-

لك المعادلة $٥س + ٥س + ٥ = ٠$ بيانياً نرسم منحنى الدالة $٥س + ٥س + ٥ = ٠$ مع محور السينات
ثم نحدد مجموعة الإحداثيات السالبة لنقط تقاطع المنحنى مع محور السينات
فتكون هي مجموعة الحل.

① وتوجد ثلاث حالات :-



مثال ١٤ :- حل المعادلة $s^2 + s - 3 = 0$ بيانياً من الفترة $[-6, 3]$ ثم تحقق من صحة الحل جبرياً.



الحل :- ندرس منحنى الدالة $(s) = s^2 + s - 3$

s	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
(s)	3	-2	-5	-6	-5	-2	3	0	1	0

ومن الرسم نجد أنه $3 = 2 = -6$

الآن نتحقق من صحة الحل جبرياً :-

$$s^2 + s - 3 = 0 \iff (s - 2)(s + 3) = 0$$

$$s = 2 \quad | \quad s = -3$$

$$\therefore 3 = 2 = -6$$

② وعليه نتحقق من صحة الحل أيضاً بالتعويض بالمجموعة الحل من المعادلة فنجد أنه صحيح.

هـ "ملحوظة هامة" :- من حالة عدم إعطاء تلك فترة للتحميل يمكننا الحل بإيجاد نقطة رأس المنحنى وهى $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ ثم نوجد عدة نقاط على المنحنى ونربطها

تمارين على حل معادلة الدرجة الثانية من مجهول واحد

II اختر الإجابة الصحيحة :-

- ① المعادلة $(x-1)(x+2)=0$ من الدرجة [الأولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة]
- ② جذر المعادلة $x^2 - 5x + 3 = 0$ هما [$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ ، $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$ ، $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ ، $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$]
- ③ مجموعة حل المعادلة $x^2 + 2 = 0$ فى ح هـ [$3-2$ ، $3-3$ ، $3-3$ ، $3-3$]
- ④ إذا كان $x=2$ جذراً للمعادلة $x^2 + mx + 3 = 0$ فإذن $m=$ [1 ، 2 ، 3 ، 4]
- ⑤ مجموعة حل المعادلة $x^2 = x$ هـ [3 ، 3 ، 3 ، 3]
- ⑥ إذا قطع منحنى الدالة التربيعية محور السينات من نقطتين فإنه عدد حلول المعادلة هو [صفر ، 1 ، 2 ، عدد لا نهائى]

III أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات الآتية :-

- (1) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (2) $x^2 - 3 = 0$ (3) $x(x+1)(x-1) = 0$
- (4) $x^2 + 3x = 0$ (5) $x^2 + 9 = 0$ (6) $x^2 - 5x + 1 = 0$

IV حل كل معادلة من المعادلات الآتية من خلال القانون العام :-

- (1) $x^2 - 6x + 7 = 0$ (2) $x^2 + 6x + 8 = 0$ (3) $x^2 - 3x - 1 = 0$
- (4) $x^2 + 3x - 4 = 0$ (5) $x^2 - 3x - 6 = 0$ (6) $x^2 - 3x - 6 = 0$

V أوجد مجموعة حل المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$ بيانياً من الفترة [2 ، 6]

VI أوجد قيمة كل من p و b إذا كان $3-6$ هما جذر المعادلة $x^2 + px + b = 0$

٢٠) مقدمة عن الأعداد المركبة

تمهيد :- سنبصر أنه درسنا نظام الأعداد الطبيعية (عد) ونظام الأعداد الطبيعية (ط) ونظام الأعداد النسبية (ص) ونظام الأعداد الحقيقية (ح) وعلمنا أنه أي نظام نشأ لتوسيع للنظام الذي يسبقه حل معادلات جديدة لم تكن قابلة للحل في النظام السابق.

فمثلاً المعادلة $x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow x = -1$ (ليس لها حل في ح) لذا كانه التفكير في نظام جديد للأعداد عليه حل هذا النوع من المعادلات ويكونه توسيع لنظام الأعداد الحقيقية (ح).

العدد التخيلي (ق) :-

كل المعادلة السابقة سنفرص عددًا x يحقق المعادلة $x + 1 = 0$ وسنرمز لهذا العدد بالرمز (ق) أي أنه "العدد التخيلي" هو العدد الذي مربعه -1 وبالحالي $ق^2 = -1$

وعلى هذا فإنه عليه حل المعادلة $ق^2 + 1 = 0$ كالحالي :-

$$ق^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow ق^2 = -1 \Leftrightarrow ق = \pm \sqrt{-1} = \pm ق$$

$$∴ ٢-ق = ق^2 - ١ = ٠, ق = ١ - ق^2 = ٠ \text{ حيث } ق \neq ٠$$

وبذلك نوجد مجموعة جديدة من الأعداد تسمى مجموعة الأعداد العقلية.

مثال ① أوجد مجموعة حل المعادلة $ق^2 + 17 = 0$.

$$∴ ق^2 + 17 = 0 \Leftrightarrow ق^2 = -17 \Leftrightarrow ق = \pm \sqrt{-17} = \pm ١٧ ق$$

$$∴ ق = \pm ١٧ ق = \pm ٤ ق$$

$$∴ ٤-ق = ق^2 - ١٦ = ٠ \text{ حيث } ق \neq ٠$$

* خلاصة الكلام * لايجاد $ت^N$ حيث $٣ \leq N$ من تقسيمه على ٤

فيكون $ت^N =$ أحد من القيم كما بالجدول .

باقي القسمة	٠	١	٢	٣
القيمة	١	٢	١	٢

* * ترتيب * القسمة أبسط صورة :-

* * $ت^٩$ ، $ت^١٩$ ، $ت^٤٩$ ، $ت^١٠٩$ ، $ت^٢٠٩$ ، $ت^٤٠٩$ ، $ت^٨٠٩$ ، $ت^١٦٠٩$

العدد المركب :-

لايجاد حل المعادلة $س^٢ - ٢٨س + ٢٥ = ٠$ بالقانون العام نجد أن :-

$$س = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \times 25}}{2} = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 100}}{2} = \frac{28 \pm \sqrt{684}}{2} = \frac{28 \pm 26.15}{2}$$

$$س = \frac{28 \pm 26.15}{2} = ١٧.٠٧٥ \text{ و } ٠.٩٢٥$$

أي أنه :- المعادلة لها جذران هما ١٧.٠٧٥ و ٠.٩٢٥ ولكننا لا نختارهما لأن

مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} ليس كل من ١٧.٠٧٥ و ٠.٩٢٥ "عددًا مركبًا"

أي أنه :- العدد المركب هو العدد الذي يمكن وضعه على الصورة $س = ب + ج$ حيث $ب$ و $ج$ أعداد حقيقية .

أصله لأعداد مركبة :- $٢ - ٣$ ، $٧ + ١٢$ ، $٥ - ٦$ ، $٦ + ١٧$ ، $٦ - ٤$

من ملاحظات :-

(١) إذا كان $س = ب + ج$ وكان $ب = ٠$ فإنه $س = ج$ ويكون $س$ "حقيقيًا صفرًا" .

(٢) إذا كان $س = ب + ج$ وكان $ب = ٠$ فإنه $س = ج$ ويكون $س$ "تخييليًا صفرًا" .

(٣) أي عدد حقيقي هو عدد مركب جزئياً التخييل = صفر .

(٤) أي عدد تخيلي هو عدد مركب جزئياً الحقيقي = صفر .

كساي عددية مركبة :-

يتساوى العدد المركبة إذا وقطع إذا تساوى الجزاء الحقيقية وتساوى الجزاء التخيلية .

أي أنه :- إذا كان $P + bT = S + p$ فانه $p = P$ و $b = S$
 الجزء الحقيقي = الجزء الحقيقي \Rightarrow الجزء التخيلي = الجزء التخيلي "والعكس صحيح"
 ← "خاصية" إذا كان $P + bT = 0$ $\Leftrightarrow P = \text{صفر}$ و $b = \text{صفر}$ (مهمة)

مثال ⑤ :- أوجد قيمتي S و b إذا كان :-

$$(1) \quad S - 3b = 5 + (2 + 7i) = 7 + 5i$$

$$(2) \quad S + bT = 5 - 2i = 5 - 2i$$

الحل :-

(1) :- العدد المركب متساويان \Leftrightarrow الحقيقي = الحقيقي \Rightarrow التخيلي = التخيلي

$$S - 3b = 5 \quad \Leftrightarrow \quad S - 3b = 5$$

$$5 = S + 2b \quad (2 \times) \quad 10 = S + 4b$$

$$10 = S + 4b \quad \xleftarrow{(1 \div)} \quad 1 = S + 4b$$

$$3 = S - 3b \quad \xleftarrow{(1 \div)} \quad 3 = S - 3b$$

$$1 = S + 4b \quad \xleftarrow{(3 \div)} \quad 1 = S + 4b$$

(2) :- العدد المركب = الحقيقي = صفر \Rightarrow التخيلي = صفر

$$S + bT = 5 - 2i = 5 - 2i \quad \Leftrightarrow \quad S + bT = 5 - 2i$$

$$5 = S + 4b \quad \xleftarrow{(1 \div)} \quad 5 = S + 4b$$

* تدوين * أو جد قيم s و v إذا كان :-

$$(1) \quad (2s - v) + (v + 3s) = 7 + 0$$

$$(2) \quad 2s - v + v + 3s = 7 + 0$$

العمليات على الأعداد المركبة :-

- يمكن استخدام خواص الأبدال والجمع والتوزيع عند جمع أو ضرب الأعداد المركبة .
- عند جمع أو طرح عددين مركبين نجمع أو نطرح الحزائير الحقيقية معًا والحزائير التخيلية معًا .

مثال ② :- أو جد ناتج ما يأتي من أبسط صورة :-

$$(5) \quad (3 + 2i)(3 - 2i)$$

$$(11) \quad (7 + 3i) + (9 - 5i)$$

$$(6) \quad (1 - i)^2$$

$$(12) \quad (4 - i) - (5 - i)$$

$$(7) \quad (1 - i)^4$$

$$(13) \quad (3 + 2i)(5 - i)$$

$$(14) \quad (3 + 2i)^2$$

الحل :-

$$(1) \quad (7 + 3i) + (9 - 5i) = 16 - 2i$$

$$(2) \quad (4 - i) - (5 - i) = 4 - i - 5 + i = -1$$

$$(3) \quad (3 + 2i)(5 - i) = 15 - 3i + 10i - 2i^2 = 15 + 7i - 2(-1) = 15 + 7i + 2 = 17 + 7i$$

$$(4) \quad (3 + 2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 = 9 + 12i + 4(-1) = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$$

$$(5) \quad (3 + 2i)(3 - 2i) = 9 - 6i + 6i - 4i^2 = 9 - 4(-1) = 9 + 4 = 13$$

$$(6) \quad (1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$$

$$(7) \quad (1 - i)^4 = (-2i)^2 = 4i^2 = 4(-1) = -4$$

$$(8) \quad = -4$$

"خد بالله"

$$(b + p)^2 = b^2 + 2bp + p^2$$

$$(b - p)^2 = b^2 - 2bp + p^2$$

"فرصة جيدة مرعبة"

الابداع في الرياضيات

$$\cdot \sum_{i=1}^n = \sum_{i=1}^n \epsilon_i =$$

* * * سيب * * * أو جدنا ج ما يأتي من البسط جورة :-

$$^2(\bar{r}+1) \quad (0) \quad (\bar{r}+3-)(\bar{r}-1) \quad (1)$$

مثال ٥ :- أوجد \sin ، \cos و \tan للتيقيد $\sqrt{2} \cos \theta = 1$ المعادلة

اخرے :- $7 = (5 + 3) - (5 - 3) = 9$

$$9 - 3 + 5 = 5 + 5 = 10 \therefore$$

$$\bar{v}(\bar{v} = 0.3) + (9 - 3 + 0.5) = \bar{v} \therefore$$

$$\textcircled{1} \leftarrow \therefore 7 - 445 \leftarrow \therefore 9 - 3 + 445 \therefore$$

$$\in \longleftarrow v - \omega r = 0 \Leftarrow v = 0 = \omega r \therefore$$

بالقوسية عند (4) ف (1) $\Leftrightarrow \bullet = 7 - \omega(V - \omega^3) \Leftrightarrow \bullet = 7 - \omega V - \omega^3$

$$= (r - \omega)(c + \omega r)$$

$$\mu = \omega \leftarrow \cdot = \mu - \omega \quad | \quad \cdot = c + \omega \mu$$

ضد ۵) \Leftarrow س = C

فی ۵ کے س = ۹ - ۴

$$* * * * * \text{تدريب} * * * * * \text{أوجد من } (x) \text{ القيمة الحقيقية المعادلة :-}$$

$$1 + (x + 3)(x + 5) = 1$$

العدداه المترافقا :-

العدداه $P + B$ و $P - B$ مترافقان إذا لم يسبقا عدداه مترافقا
مثلا لاحظ أنه :- العددا المركب ومرافقه لا يختلفا إلى غير إشارة الجزئ التخيل منها

مثال :- العدد $3 + 2i$ مرافقه $3 - 2i$
العدد $5 - i$ مرافقه $5 + i$
العدد $4 - i$ مرافقه $4 + i$ "لاحظ أنه الجزئ الحقيقي = صفر"

⊗ بعض خواص العدداه المترافقا :-

(1) مجموع العددين المترافقين هو عدد حقيقي حيث $P + B = (P - B) + (P + B)$
مثال $2 = (3 - i) + (3 + i)$

(2) حاصل ضرب العددين المترافقين هو عدد حقيقي حيث $P + B = (P - B)(P + B)$
مثال $13 = 9 + 4 = (3 - i)(3 + i)$

(3) يمكن إجراء عملية قسمة عدد مركب على آخر مركب بضرب كل منهما في العدد المرافق للمقام لجعل المقام عددا حقيقيا .

مثال :- ضاع العدد $\frac{10}{3 + 2i}$ على الصورة $P + Bi$
الحل :- بالضرب ببطا ومقاما في $3 - 2i$

$$3 - 2i = \frac{(3 - 2i)10}{1 + 4} = \frac{(3 - 2i)10}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{3 - 2i}{3 + 2i} \times \frac{10}{10} = \frac{10}{3 + 2i}$$

$$* * * * * \text{تدريب} * * * * * \text{ضع العدد } \frac{5}{3 - 2i} \text{ في الصورة } P + Bi .$$

الصف الأول الثانوي

تأديته على مقدمة عند الأعداد المركبة "

① سے ۶ = ----

⑤ مجموعة حل المعادلة $x^2 + 9 = 0$ هي: \emptyset

$$\dots = (\sigma - \varepsilon) + (\sigma_0 + \tau) \quad (3)$$

$$\dots = (\bar{v} - 2)(\bar{v}_0 + 3) \textcircled{2}$$

⑤ المَعْلُومُ الضَّرْفِيُّ للعدد ٣ + ٢ = ٥ هو ...

$$\dots = \frac{v+vn}{c} n \phi \theta N n b i z ! \textcircled{7}$$

٧) مراغه العدد ٣+٢ حتى ضوء.....

⑤ حاصل چند به عدد دیگر مضافیت می یابد و آن را میسای...

نفاذ (سی، ص) =

$\frac{1}{10}$, $c + \sqrt{2}$, $19 + \sqrt{2}$, $2c + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$, 2^2 , 2^3 , 2^4 , 2^5

(٣) أوجد قيمـة $3 + 3 + 7 + 3 + 1 + 3 + 3 + 3$ من أبسط صورة.

4 أوجد ناتج ما يأتي ضا أبسط صورة :-

$$\begin{array}{ll} (1) (3+5)(1-2) & (2) (3-2)(3+2) \\ (3) (3+5)(3-2) & (4) (3-2)(3+2) \\ (5) (3+5)(3-2) & (6) (3-2)(3+2) \end{array}$$

5 أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :-

$$\begin{array}{ll} (1) 3x + 1 = 0 & (2) 9x + 10 = 71 \\ (3) \frac{3}{5}x + 10 = 0 & (4) 6x - 7 = 13 \\ (5) 4x + 20 = 0 & (6) 7x - 6 = 13 \end{array}$$

6 أوجد قيمتي س، من اللينيه تحققاه كل من المعادلات الآتية :-

$$\begin{array}{ll} (1) (1+x) + 2x = 10 & (2) (1+x) + 2x = 10 \\ (3) (3-x) + (3-x) = 0 & (4) (3-x) + (3-x) = 0 \end{array}$$

7 ضع كل ما يأتي ضا أبسط صورة :-

$$\begin{array}{ll} (1) \frac{x+2}{x} & (2) \frac{x-3}{x-2} \\ (3) \frac{6}{x-3} & (4) \frac{x-3}{x-2} \\ (5) \frac{c}{x+1} & (6) \frac{x+3}{x-5} \\ (7) \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)} & (8) \frac{x-3}{x-2} \end{array}$$

8 إذا كان $\frac{x+c}{x+1} = 3$ ، $\frac{x+1}{x+1} = 3$ أثبت أنه ل، م مترافقان

ثم احسب قيمة :- $\frac{(3+1)10}{(3+1)11}$

9 أثبت أنه

$$\begin{array}{ll} (1) 13c = 12(3x-1) + 12(3x+1) & (2) 13c = 12(3x-1) + 12(3x+1) \\ (3) 13c = 12(3x-1) + 12(3x+1) & (4) 13c = 12(3x-1) + 12(3x+1) \end{array}$$

مكتبة وسام

شويين - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات
01004423597.3943035

(٣) "تقديم نوع جذري المعادلة التربيعية"

المميز:-

* جذرا المعادلة التربيعية $P = x^2 + bx + c = 0$ حيث $P \neq 0$ ، $b \in \mathbb{R}$ ، $c \in \mathbb{R}$ هما $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2P}$ ، وكلاهما يحتوي على المقدار $\sqrt{b^2 - 4c}$.
 * يسمى المقدار $b^2 - 4c$ "ميز المعادلة التربيعية" وليست قدم لتقديم نوع جذري

المعادلة التربيعية حسب الحالات الآتية :-

(١) إذا كان المميز موجبا أي أنه $b^2 - 4c > 0$.

فإنه للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

ومنحنى الدالة $D(x) = x^2 + bx + c$ يتقاطع

محور السينات من نقطتين إحداثياتهما السالبة هما جذرا المعادلة

(٢) إذا كان المميز = صفر أي أنه $b^2 - 4c = 0$.

فإنه للمعادلة جذران حقيقيان متساويان

ومنحنى الدالة $D(x) = x^2 + bx + c$ ليس

محور السينات من نقطة واحدة وإحداثيات السين هو جذر المعادلة وهذه النقطة

هي $(-\frac{b}{2}, \frac{b^2 - 4c}{4})$ ويكونه الجذر هو $-\frac{b}{2}$.

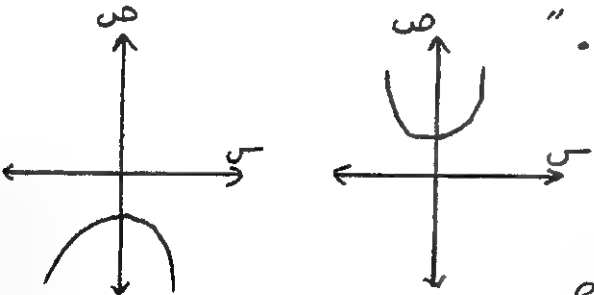
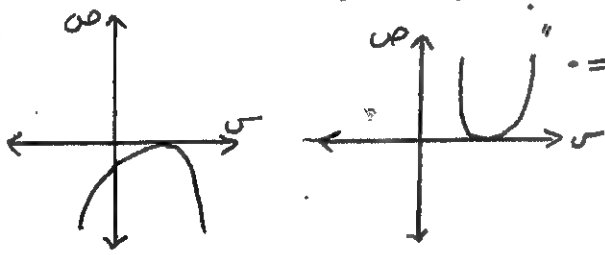
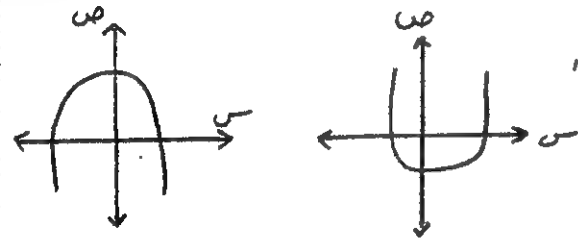
(٣) إذا كان المميز سالبا أي أنه $b^2 - 4c < 0$.

فإنه للمعادلة جذران مركبان غير حقيقيين

وهما عددان مترافقان دائما .

ومنحنى الدالة $D(x) = x^2 + bx + c$ لا يترك

مع محور السينات من أي نقطة (لا يقطع ولا يمس)



مثال ① :- عيبر نوع جذري كل صه المعادلات الآتية ووه حل

$$(٣) \quad ٠ = ٩ + ٥١٢ + ٢٢$$

$$(١) \quad ٠ = ٦ - ٥٢ + ٣٢$$

$$(٤) \quad ٠ = ١ + ٥ + ٢٢$$

$$(٢) \quad ٠ = ٣ - ٥٥ + ٢٢$$

الحل :-

$$\begin{array}{l|l} ٣ = ٢ & \\ ٤ = ٥ & \\ ٦ = ٣ & \end{array}$$

$$(١) \quad ٠ = ٦ - ٥٢ + ٣٢$$

$$\text{المميز} = ٢ - ٤ = ٢٤ - ١٦ = ٦ - ٨٣ \times ٤ - ١٦ = ٧٢ + ١٦ = ٨٨ < ٠$$

∴ الجذرايه حقيقياه مختلفاه

$$\begin{array}{l|l} ١ = ٢ & \\ ٥ = ٥ & \\ ٣ = ٣ & \end{array}$$

$$(٢) \quad ٠ = ٣ - ٥٥ + ٢٢$$

$$\text{المميز} = ٢ - ٤ = ٢٤ - ٢٥ = ٣ - ١ \times ٤ - ٢٥ = ١٢ + ٢٥ = ٣٧ < ٠$$

∴ الجذرايه حقيقياه مختلفاه

$$\begin{array}{l|l} ٤ = ٢ & \\ ١٢ = ٥ & \\ ٩ = ٣ & \end{array}$$

$$(٣) \quad ٠ = ٩ + ٥١٢ + ٢٢$$

$$\text{المميز} = ٢ - ٤ = ٢٤ - ١٤٤ = ٩ \times ٤ \times ٤ - ١٤٤ = ١٤٤ - ١٤٤ = ٠$$

∴ الجذرايه حقيقياه متساويه

$$\begin{array}{l|l} ٢٥ = ٢ & \\ ١ = ٥ & \\ ١ = ٣ & \end{array}$$

$$(٤) \quad ٠ = ١ + ٥ + ٢٢$$

$$\text{المميز} = ٢ - ٤ = ٢٤ - ١ = ١ \times ٢٥ \times ٤ - ١ = ١٠٠ - ١ = ٩٩ > ٠$$

∴ الجذرايه غير حقيقياه (مركباه)

* * * تدريب * عيبر نوع جذري كل صه المعادلات الآتية :-

$$(٤) \quad ٦ = (٢ - ٥)٢$$

$$(١) \quad ٠ = ٥ + ٥٢ - ٢٢$$

$$(٥) \quad ١ = ٥٢ - (٣ - ٥)٢$$

$$(٢) \quad ٠ = ٢٥ + ١٠ - ٢٢$$

$$(٦) \quad ٣ = (٤ + ٥)(٢ - ٥)$$

$$(٣) \quad ٤ = ٣٢ + ١٠ - ٢٢$$

في "ملاحظات"

- (١) المعادلة $P^2 + bP + c = 0$ يكون لها جذور حقيقية إذا كان $b^2 - 4c \geq 0$.
- (٢) إذا كانت المعاملات P, b, c أعداد نسبية وكان $b^2 - 4c$ مربع كامل (له جذر) فإن الجذور تكون أعداداً نسبية (مهمة).

(٣) إذا كان $c = 0$ $\Leftrightarrow P^2 + bP = 0 \Leftrightarrow P(P + b) = 0$

$$\begin{array}{l} P = 0 \text{ أو } P = -b \\ \boxed{\frac{P}{P} = 1} \end{array}$$

(٤) إذا كان $b = 0$ $\Leftrightarrow P^2 + c = 0 \Leftrightarrow P^2 = -c$

$$\Leftrightarrow P = \pm \sqrt{-c} \quad \Leftrightarrow \frac{P}{P} = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \frac{P}{P} = \pm 1$$

مثال ٥ :- إذا كان جذر المعادلة $P^3 + 3P^2 + 6P + 3 = 0$ متساويين. أوجد له الحل.

الحل :- الجذور متساوية $\Leftrightarrow b^2 - 4c = 0$

$$\Leftrightarrow 36 - 36 = 0 \Leftrightarrow 36 - 36 = 0 \Leftrightarrow 36 - 36 = 0 \Leftrightarrow \boxed{3 = 0}$$

مثال ٦ :- إذا كان P, b, c أعداداً نسبية فثبت أنه جذر المعادلة

$$P^3 + (b^2 + c)P^2 + bP + c = 0 \text{ نسبياً}$$

الحل :- المعاملات أعداد نسبية \therefore يجب إثبات أنه المحيز مربع كامل.

$$\begin{array}{l} P = P \\ b^2 + c = b^2 + c \\ bP = bP \end{array} \quad \begin{array}{l} = P^3 + (b^2 + c)P^2 + bP + c \\ = P^3 + b^2P^2 + cP^2 + bP + c \\ = P^3 + b^2P^2 + bP + c \\ = (P^2 + bP + c)P + c \\ = 0 + c = c \end{array}$$

\therefore المعاملات أعداد نسبية \therefore المحيز مربع كامل

\therefore الجذور نسبياً #

* * * تدريبي * (١) إذا كان جذر المعادلة $x^2 + 2x + c = 0$ متساويين أو غير
 * * * (٢) إذا كان $6P$ من أعداد نسبية فأثبت أنه جذر المعادلة

$$x^2 - P(x + P) + c = 0$$
 نسبي.

مثال ٣ أثبت أنه جذر المعادلة $x^2 - 2x + c = 0$ مركبان وأوجد هـ.

الحل :: ∴ $x^2 - 2x + c = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-c}$
 ∴ الجذران مركبان.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4c}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1-c}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-c}$$

 ∴ جذرا المعادلة هما $1 + \sqrt{1-c}$ و $1 - \sqrt{1-c}$

* * * تدريبي * أثبت أنه جذر المعادلة $x^2 - 3x + 1 = 0$ مركبان وأوجد هـ.

مثال ٤ :: إذا كان جذر المعادلة $x^2 - 2x + c = 0$ متساويين
 فأوجد قيمة c الحقيقية ثم أوجد الجذرين.

الحل :: ∴ $x^2 - 2x + c = 0$ متساويين
 ∴ $(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$
 ∴ الجذران متساويين ∴ $x^2 - 2x + c = 0$

$$1^2 - 2(1) + c = 0 \Rightarrow 1 - 2 + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

 ∴ $c = 1$

⊗ عند $c = 1$ المعادلة هي $x^2 - 2x + 1 = 0$ (بالعقل)

$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

أي أنه عندك c يكونه الجذرين متساويين وكل منهما $= 3$.

* عندك $c = 0$ المعادلة هي $x^2 - 1 = 0$ (بالعليل)

$$(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x=1$$

أي أنه عندك $c = 0$ يكونه الجذرين متساويين وكل منهما $= 1$.

* * * تدريب * أوجد قيم c الحقيقية التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - 6x + c = 0$ متساويين. ثم أوجد هذين الجذرين.

مثال * :- أوجد قيم c الحقيقية التي تحقق المعادلة $x^2 - 5x + c = 0$ لها جذرين حقيقيين (لها حل ضح).

$$\begin{cases} 1 = p \\ c = q \\ c = q \end{cases}$$

الحل :- :- المعادلة لها جذرين حقيقيين

$$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow 25 - 4c \geq 0 \Rightarrow c \leq \frac{25}{4}$$

$$c \leq \frac{25}{4} \Rightarrow c \leq 6.25$$

$$c \leq 6.25 \Rightarrow c \leq \frac{25}{4}$$

:- المعادلة لها جذرين حقيقيين إذا كان $c \leq \frac{25}{4}$

* * * تدريب * ① أوجد قيم c التي تجعل للمعادلة $x^2 - 4x + c = 0$ جذرين حقيقيين مختلفين

② أوجد قيم m التي تجعل للمعادلة $x^2 - 2mx + m = 0$

ليس لها جذور حقيقية (ليس لها حل ضح)

تماديته على "تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية"

١٤ اختر الإجابة الصحيحة :-

١٤ إذا كان جذر المعادلة التربيعية $س^٢ + بس + ج = ٠$ غير حقيقي فإما $ب^٢ - ٤ج < ٠$
 (أ) < ٠ (ب) > ٠ (ج) $= ٠$ (د) $= ١$

١٥ إذا كان جذر المعادلة $س^٢ + عس + ك = ٠$ متساويين فإما $ك = ٠$
 (أ) < ٠ (ب) > ٠ (ج) $= ٠$ (د) $= ١$

١٥ إذا كان جذر المعادلة $س^٢ = س - ك$ حقيقيين مختلفين فإما $ك > ٠$
 (أ) $[١٠٠٠٠ - ١٠٠٠٠]$ (ب) $[١٠٠٠٠ - ١٠٠٠٠]$ (ج) $[١٠٠٠٠ - ١٠٠٠٠]$ (د) $[١٠٠٠٠ - ١٠٠٠٠]$

١٥ يكون جذر المعادلة $س^٢ - عس + ٩ = ٠$ حقيقيين إذا كانت
 (أ) $ك < ٠$ (ب) $ك > ٠$ (ج) $ك = ٠$ (د) $ك = ١$

١٥ حدد نوع جذري كل معادلة من المعادلات الآتية ووجه حلها :-

(١) $س^٢ - عس + ٥ = ٠$ (٢) $س^٢ - ٦س - ١٩ = ٠$

(٣) $س^٢ + ٣س + ١٠ = ٠$ (٤) $س^٢ - (١١ - س) - (٦ - س) = ٠$

(٥) $س^٢ - ١٠س + ٢٥ = ٠$ (٦) $(س - ١)(س - ٧) = (س - ٣)(س - ٤)$

١٥ أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات الآتية باستخدام القانون العام :-

(١) $س^٢ - عس + ٥ = ٠$ (٢) $س^٢ - ٣س - ٥٧ = ٠$

(٣) $س^٢ + ٦س + ٥ = ٠$ (٤) $س^٢ - (٤س - ١) + ١ = ٠$

١٤ أوجد قيمة $ك$ في كل معادلة من المعادلات الآتية :-

(١) إذا كان جذر المعادلة $س^٢ + عس + ك = ٠$ حقيقيين مختلفين .

(٢) إذا كان جذر المعادلة $س^٢ - ٣س + ٤ + ١ = ٠$ متساويين .

(٣) إذا كان جذر المعادلة $س^٢ - ٨س + ١٦ = ٠$ حقيقيين .

٥ إذا كان L, M عدديهما نسبتهما ثابتة أنه جذري المعادلة

$$Lx^2 + (L-M)x + M = 0 \quad \text{جذوره نسبيا}.$$

٦ إذا كان جذرا المعادلة $x^2 + cx + c = 0$ حيث $c = (1+e)c + (1-e)c$. متساويان

فأوجد قيم e الحقيقية ثم أوجد الجذرين.

٧ أوجد قيمة e إذا كان :-

$$(1) \text{ جذرا المعادلة } x^2 + L = 0 \text{ حقيقيا مختلفا}.$$

$$(2) \text{ جذرا المعادلة } (x^2 - 1)c - x^2 + M = 0 \text{ غير حقيقيين}.$$

٨ أثبت أنه لجميع قيم P الحقيقية عدد الصفر يكون للمعادلة :-

$$(P+1)x^2 + Px + 1 = 0 \quad \text{جذور حقيقية}$$

٩ يقدر عدد سكان جمهورية مصر العربية عام ٢٠١٣ بالعلاقة :-

$$E = N + C + 91 \text{ حيث } E \text{ عدد السكان بالمليون ، } N \text{ عدد السنوات}$$

$$(1) \text{ كم كان عدد السكان عام ٢٠١٣ ؟}$$

$$(2) \text{ قدر عدد السنوات التي يبلغ السكان في كل ٣٣٤ مليون}$$

$$(3) \text{ قدر عدد السكان عام ٢٠٠٣ ؟}$$

١٠ قطعة أرض على شكل مستطيل بعرض ٩٦ م والارتفاع ٩٦ م يار مضاعفة

مساحة هذه القطعة وذلك بزيادة طول كل من العرض والارتفاع بنفس المقدار

أوجد المقدار المضاف .

مكتبة وسام

شربين - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات

01004423597.3943035

أ / جميل غالي السيد

(٤٤)

الفصل الدراسي الأول

٤٤) الطلاقة بسبب جذري المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها

توضيح :-

نعلم أنه جذري المعادلة $x^2 - 13x + 6 = 0$ هما $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$

نلاحظ أنه :- * مجموع الجذرين = $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$ = معامل x معاكس

* حاصل ضربهم = $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ = $\frac{2}{9}$ = $\frac{\text{الحاصل المقلوب}}{\text{معامل } x^2}$

⊗ مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين :-

جذرا المعادلة التربيعية $x^2 + px + q = 0$ هما $\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$

باعتبار الجذر الأول = L ، الجذر الآخر = M فإنه :-

$$L + M = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} + \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -p$$

$$LM = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \times \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q$$

وهي الخلاصة :-

إذا كان L, M هما جذرا المعادلة $x^2 + px + q = 0$ فإنه

$\frac{L}{M} = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}$	أي أنه مجموع الجذرين = $-p$ معامل x
$\frac{L}{M} = \frac{q}{1}$	أي أنه حاصل ضربهم = q الحاصل المقلوب

(مهمة)

مثال ① :- دوو دحل المعادلة أوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهم لكل من المعادلات الآتية :-

$$0 = (x+3)(x-2)$$

$$(1) \quad 0 = x^2 - 5x + 3$$

$$(2) \quad 30 - 5x^2 = x^3$$

الحل :-

$$(1) \quad 0 = x^2 - 5x + 3 \Rightarrow p = -5, q = 3$$

$$\therefore \text{مجموع الجذرين} = \frac{5}{1} = 5, \text{ حاصل ضربهم} = \frac{3}{1} = 3$$

∴ مجموع الجذور = $\frac{-c}{a} = \frac{-3}{3} = -1$ حاصل ضرب = $\frac{c}{a} = \frac{3}{3} = 1$

$$7- = 061 = 06c = P \quad \therefore = 7-0 + 0c \Leftarrow$$

\therefore مجموع الجذرين $= \frac{5}{p} = \left[\frac{5}{2} \right]$ حاصل ضربهم $= \frac{3}{p} = \left[\frac{3}{2} \right]$

$$\Sigma = (c-s) \text{ و } (4) \quad \therefore = 1 + s \Sigma + s^2 \text{ و } (1)$$

$$(c) \quad 3s + 0 = 0 \quad (c) \quad (e) \quad (1-s)(3+s) = 0$$

الحل :- $\therefore \frac{C}{C} = \frac{C}{C} + \frac{C}{C}$

\therefore حاصل ضرب الجذرين $0 = \frac{0}{p} \Leftarrow 0 = \frac{0}{1} \Leftarrow 0 = l \Rightarrow 0 = l$ \therefore المعادلة لها حلين $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$

$$\frac{\sqrt{c-25} \pm c}{c} = \frac{\sqrt{0 \times 1 \times 2 - 25} \pm c}{1 \times c} = \frac{\sqrt{25 - 25} \pm c}{1 \times c} = \frac{0 \pm c}{c} = 0$$

* * * * *
 * * * * *
 * * * * *
 * * * * *
 * * * * *

مثال ١٥ :- إذا كان $x^2 - 5x + 6 = 0$ فما جذور المعادلة

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

أو جذرية كل x ب

الحل :- مجموع الجذرين $= -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5$ $\Rightarrow x_1 + x_2 = 5$

جاء من $x_1 + x_2 = 5$ $\Rightarrow x_2 = 5 - x_1$ $\Rightarrow x_2 = 5 - x_1$ $\Rightarrow x_2 = 5 - x_1$

$$x_1 = 2 \Rightarrow x_2 = 3$$

مثال ١٦ :- إذا كان $x^2 + 3x - 4 = 0$ فما جذور المعادلة

حيث $x_1 = 1$ $x_2 = -4$ أو جذور المعادلة

الحل :-

فد باله :-
إذا كان جذور المعادلة
عدوانه عدوانه
فانها يكونان
مترافقان

جاء من $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{1} = -3$ $\Rightarrow x_1 + x_2 = -3$

مجموع الجذرين $= -\frac{b}{a} = -\frac{3}{1} = -3$

جاء من $x_1 + x_2 = -3$ $\Rightarrow x_2 = -3 - x_1$ $\Rightarrow x_2 = -3 - x_1$

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = -4$$

هناك حل آخر لهذه المسألة وذلك بالتعويض عن $x_1 = 1$ في المعادلة
ثم نوجد x_2 ثم نحل المعادلة بالقانون لإيجاد الجذر الآخر.

مثال ١٧ :- إذا كان $x^2 - 7x + 12 = 0$ فما جذور المعادلة

حيث $x_1 = 3$ $x_2 = 4$ أو جذور المعادلة

مكة "ملاحظة هامة" من المعادلة التربيعية $p^2 + 5p + 6 = 0$.

(1) إذا كان $p = 1$ $\Leftrightarrow p + 1 = 2 = -b$ ، $p = 1$ ، $p = 1$

(2) إذا كان $p = 0$ $\Leftrightarrow p + 1 = 1 = -b$ ، $p = 0$ ، $p = 0$

أي أنه : إذا كان أحد الجذرين مقلوب بعض الآخر فإن $b = -p$ ملاحظة
جداً

(3) إذا كان $p = 2$ $\Leftrightarrow p + 1 = 3 = -b$ ، $p = 2$ ، $p = 2$

أي أنه : إذا كان أحد جذري المعادلة مقلوب ضربي للآخر فإن $p = 2$ ملاحظة
جداً

مثال ٥ :- آمل :-

(1) إذا كان أحد جذري المعادلة $x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ مقلوباً جمعياً للآخر فإن $p = 2$ ، ، ، ، ،

(2) إذا كان أحد جذري المعادلة $x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ مقلوباً ضربياً للآخر فإن $p = 2$ ، ، ، ، ،

الحل :-

(1) : إذا كان أحد الجذرين مقلوب بعض الآخر $\Leftrightarrow b = -p$ $\Leftrightarrow 2 = -p$ $\Rightarrow p = -2$ 3 = 2

(2) : إذا كان أحد الجذرين مقلوب ضربي للآخر $\Leftrightarrow p = 2$ $\Leftrightarrow 2 = p$ $\Rightarrow p = 2$ $\Rightarrow 1 + p = 3$

$\Rightarrow 3 - p = 1 + 3 = 4 = (1 - p)(1 - p) = 0 \Rightarrow p = 1$ 1 = 3

مكة بعض الملاحظات الهامة للتمارين اللفظية :-

* أحد الجذرين ضعف الآخر " $l = 2l$ " \Rightarrow * أحد الجذرين ثلاثة أضعاف الآخر " $l = 3l$ "

* أحد الجذرين ربع الآخر " $l = \frac{1}{4}l$ " \Rightarrow * النسبة بين الجذرين $= 3:1$ " $3l = l$ "

* مجموع الجذرين $= 0$ " $l + (-l) = 0$ " \Rightarrow * أحد الجذرين نقيض الآخر بقدار l " $l + (-l) = 0$ "

* أحد الجذرين ثلاثة أضعاف الآخر " $l = 3l$ " \Rightarrow * أحد الجذرين نصف الآخر " $l = \frac{1}{2}l$ "

* أحد الجذرين ثلاثة أضعاف الآخر " $l = 3l$ " \Rightarrow * أحد الجذرين نصف الآخر " $l = \frac{1}{2}l$ "

* أحد الجذرين نقيض الآخر بقدار l " $l + (-l) = 0$ " \Rightarrow * أحد الجذرين نصف الآخر " $l = \frac{1}{2}l$ "

مثال ⑥ :- إذا كان أحد جذري المعادلة $x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0$ ضعف الجذر الآخر
أوجد قيمة له .

$$\begin{array}{l} 1 = p \\ 3 = q \\ 5 = r \\ 1 = s \end{array}$$

الحل :- بفرضه أحد الجذرين $x = l$:- الجذر الآخر $x = cl$.

$$\begin{aligned} \therefore \text{مجموع الجذرين} &= \frac{-q}{p} \Leftrightarrow \frac{-3}{1} = l + cl \Leftrightarrow \frac{-3}{1} = l(1+c) \Leftrightarrow \frac{-3}{1+c} = l \quad \text{①} \\ \therefore \text{حاصل ضربهم} &= \frac{r}{p} \Leftrightarrow \frac{5}{1} = l \times cl \Leftrightarrow \frac{5}{l} = cl \Leftrightarrow \frac{5}{-3/(1+c)} = cl \Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = cl \\ &\Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = cl \Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = \frac{-3}{1+c} \Leftrightarrow 5(1+c)^2 = 9 \end{aligned}$$

مثال ⑦ :- أوجد قيمة m التي تجعل أحد جذري المعادلة $x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0$ من مضروب
ضعف الجذر الآخر بقدر 1

$$\begin{array}{l} 1 = p \\ 3 = q \\ 5 = r \\ 1 = s \end{array}$$

الحل :- $\therefore x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0$

بفرضه أحد الجذرين $x = l$:- الجذر الآخر $x = cl$

$$\begin{aligned} \therefore \text{مجموع الجذرين} &= \frac{-q}{p} \Leftrightarrow \frac{-3}{1} = l + cl \Leftrightarrow \frac{-3}{1} = l(1+c) \Leftrightarrow \frac{-3}{1+c} = l \quad \text{①} \\ \therefore \text{حاصل ضربهم} &= \frac{r}{p} \Leftrightarrow \frac{5}{1} = l \times cl \Leftrightarrow \frac{5}{l} = cl \Leftrightarrow \frac{5}{-3/(1+c)} = cl \Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = cl \\ &\Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = cl \Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = \frac{-3}{1+c} \Leftrightarrow 5(1+c)^2 = 9 \end{aligned}$$

$$\text{⑦} \quad \begin{array}{c} \vee \\ + \\ \hline 3 \\ - \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \vee \\ + \\ \hline 3 \\ - \\ \hline 1 \end{array}$$

⑦

$$0 = (3-l)(7+cl) \Leftrightarrow$$

$$0 = 3 - l \quad 0 = 7 + cl$$

$$3 = l \quad \frac{7}{c} = l$$

$$\Leftrightarrow \text{من ①}$$

$$\Leftrightarrow \text{من ②}$$

$$m = 1 + 3 \times 3$$

$$3 = 1 + \frac{7}{c} \times 3$$

$$\boxed{10 = m}$$

$$\boxed{\frac{19}{c} = 3}$$

* تدريس (1) إذا كان أحد جذري المعادلة $x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0$ ضعف الجذر الآخر
* * * الجذر الآخر أوجد قيمة له

(c) أوجد قيمة له التي تجعل جذري المعادلة $x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0$
ثلاثة أمثال الجذر الآخر .

مثال ① :- أوجد الشرط اللازم لكي يكون أحد جذري المعادلة

$$x^2 + px + q = 0 \text{ مساوياً للآخر ضعف الجذر الآخر}$$

الحل :- نفرض أحد الجذرين α \therefore الجذر الآخر $-\alpha$

$$\therefore \text{مجموع الجذرين} = -\frac{p}{q} \iff \alpha - \alpha = -\frac{p}{q} \iff \frac{p}{q} = 0 \iff p = 0$$

$$\therefore \text{حاصل ضربهم} = \frac{q}{q} = 1 \iff \alpha(-\alpha) = 1 \iff -\alpha^2 = 1 \iff \alpha^2 = -1$$

$$\text{بالتعويض من ① في ②} \iff \frac{p}{q} = (\alpha^2) = -1 \iff \frac{p}{q} = -1 \iff p = -q$$

$$\iff \frac{p}{q} = -1 \iff p = -q \iff \boxed{p + q = 0} \text{ "الشرط المطلوب"}$$

* * * ترتيب * * *
أوجد الشرط اللازم لكي يكون أحد جذري المعادلة
 $x^2 + px + q = 0$ مساوياً للآخر ضعف الجذر الآخر.

مثال ② :- أوجد قيمة p التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - 3x + c + \frac{1}{p} = 0$ متساويين

الحل :- الجذرين متساويين $\iff x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$

$$1 = p$$

$$3 = c$$

$$\frac{1}{p} + c = 0$$

$$\iff \frac{1}{p} + c = 0 \iff \frac{1}{p} + 3 = 0 \iff \frac{1}{p} = -3 \iff p = -\frac{1}{3}$$

$$\iff \frac{1}{p} = -3 \iff \frac{1}{-1/3} = -3 \iff -3 = -3$$

$$\iff \boxed{p = -1/3} \iff \frac{1}{p} = -3$$

مثال ③ :- إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $x^2 + 5x + c = 0$ يساوي

مجموع جذري المعادلة $x^2 - (c+5)x + c = 0$ أوجد قيمة c

الحل :- حاصل ضرب جذري المعادلة الأولى $\frac{c}{1} = \frac{c}{1}$ \therefore مجموع جذري الثانية $\frac{c}{1} = \frac{c}{1}$

$$\therefore \frac{c}{1} = \frac{c}{1} \iff c + c = c \iff \boxed{c = 0}$$

تمارين على "العلامة" بمعبر جذري المعادلة لتربيعية ومعاملات حدودها

❶ اختر الاجابة الصحيحة :-

❶ مجموع جذري المعادلة $x^2 + 5x + 10 = 0$ يساوي [-5 ، -10 ، 5 ، 10]

❷ حاصل ضرب جذري المعادلة $x^2 - 3x + 0 = 0$ يساوي [$\frac{3}{2}$ ، $\frac{3}{2}$ ، $\frac{0}{2}$ ، $\frac{0}{2}$]

❸ مجموع جذري المعادلة $x^2 - 5x + 7 = 0$ يساوي [-5 ، -7 ، 5 ، 7]

❹ إذا كان مجموع مجموع جذري المعادلة $x^2 + 12x + 7 = 0$ يساوي 3 فإنه $k = \dots$

[-7 ، -12 ، 7 ، 12]

❺ إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $x^2 + 4x + c = 0$ يساوي 1 فإنه $k = \dots$

[-1 ، -4 ، 1 ، 4]

❻ إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 - (3+k)x + k = 0$ معكوس للجذر الآخر فإنه $k = \dots$

[-3 ، -6 ، 3 ، 6]

❼ إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 - (3+k)x + k = 0$ معكوس لجذر الآخر فإنه $k = \dots$

[-3 ، -6 ، 3 ، 6]

❽ إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 - 12x + 10 = 0$ ثلاثة أضعاف الآخر فإنه $k = \dots$

[-1 ، -12 ، 1 ، 12]

❾ دونه حل المعادلة أو جد مجموع الجذرين وحاصل ضربهم لكل من المعادلات الآتية :-

(1) $x^2 + 5x - 30 = 0$ (ب) $(x^2 + 3x + c)(x^2 - 5x + 0) = 0$

(2) $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} = 3$ (3) $3x^2 - 7x + 1 = 0$

❿ إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $x^2 + 10x + 3 = 0$ هو $\frac{1}{3}$ أو جذرية ج

فم حل المعادلة في مجموعة الأعداد المركبة

⓫ إذا كان مجموع جذري المعادلة $x^2 + 5x - 0 = 0$ هو $\frac{3}{2}$ أو جذرية ب

فم حل المعادلة في مجموعة الأعداد المركبة

٥ أوجد الجذر الآخر للمعادلة ثم أوجد قيمة P من كل مما يأتي :-

(١) إذا كان $x = 1$ أحد جذري المعادلة $x^2 - 5x + P = 0$

(٢) إذا كان $x = 1$ أحد جذري المعادلة $x^2 - 5x + P = 0$

٦ أوجد قيم P و b من كل من المعادلات الآتية إذا كان :-

(١) $x^2 + 5x + P = 0$ جذرا المعادلة $x^2 + 5x + P = 0$

(٢) $x^2 + 5x + P = 0$ جذرا المعادلة $x^2 + 5x + P = 0$

(٣) $x^2 + 5x + P = 0$ جذرا المعادلة $x^2 + 5x + P = 0$

٧ أوجد قيمة k التي تجعل أحد جذري المعادلة $x^2 + 5x + k = 0$

هو المقلوس الضرب للجذر الآخر

٨ أوجد قيمة k التي تجعل أحد جذري المعادلة $x^2 + 5x + k = 0$

المقلوس المحض للجذر الآخر

٩ إذا كان $x = 1$ أحد جذري المعادلة $x^2 + 5x + k = 0$ ليساوي مربع الجذر الآخر

أوجد قيمة k

١٠ إذا كانت النسبة بين جذري المعادلة $x^2 + 5x + k = 0$ كنسبة $2:3$

أثبت أن $P = 6$

١١ أوجد الشرط اللازم لكي يكون أحد جذري المعادلة $x^2 + 5x + k = 0$

نصف الجذر الآخر

١٢ إذا كان مجموع جذري المعادلة $x^2 + 5x + k = 0$ ليساوي حاصل

ضرب جذري المعادلة $x^2 + 5x + k = 0$ أوجد قيمة k

١٠. تكوير المعادلة التربيعية من علم جذورها

* إذا فرضنا أن $ل، م$ هما جذري المعادلة التربيعية $س^2 + ب س + ج = ٠$ #٢٤

بالقسمة على $س$ $س + ب + \frac{ج}{س} = ٠$ \Leftarrow ①

ونعلم أن $ل + م = -ب$ $\frac{ج}{ل} = -م$ $\frac{ج}{م} = -ل$ بالتعويض من ①

\Leftarrow المعادلة تكويرة على الصورة $س^2 - (ل + م) س + ل م = ٠$

أي أن $س^2 - (\text{مجموع الجذرين}) س + \text{حاصل ضرب الجذرين} = ٠$ معطى

ونلاحظ أيضًا أنه تلعب المعادلة على الصورة: $٠ = (س - ل)(س - م)$

مثال ① :: تكوير المعادلة التربيعية التي جذورها ::

$$(٣) \quad ٣س + س^2 - ٢٤ = ٠$$

$$(١) \quad ٥، ٣$$

$$(٤) \quad \frac{س^2 + س - ٢٤}{س + ١} = \frac{س^2 - ٢٤س - ٢٤}{س - ٢}$$

$$(٢) \quad ٥٧ + س، ٢٦ - س$$

الحل ::

$$(١) \quad \text{مجموع الجذرين} = ٥ + ٣ = ٨ \quad \text{حاصل ضرب الجذرين} = ٥ \times ٣ = ١٥$$

:: المعادلة تكويرة على الصورة $س^2 - (\text{مجموع الجذرين}) س + \text{حاصل ضرب الجذرين} = ٠$

$$\Leftarrow س^2 - ٨س + ١٥ = ٠ \quad \#$$

$$(٢) \quad \text{مجموع الجذرين} = ٥٧ + س + ٢٦ - س = ٨٣ \quad \text{حاصل ضرب الجذرين} = (٥٧ - س)(٢٦ + س) = ١٤٨٢ - ٣١س$$

$$\Leftarrow س^2 - ٨٣س + ١٤٨٢ - ٣١س = ٠ \quad \#$$

$$(٣) \quad \text{مجموع الجذرين} = ٣س + س^2 - ٢٤س + ٣ = س^2 - ٢١س + ٣ \quad \text{حاصل ضرب الجذرين} = (٣س - ٢٤)(س + ٣) = ٣س^2 - ٢١س + ٣$$

$$\Leftarrow س^2 - ٢١س + ٣ = ٠$$

(٤) نضع كل جذر من أبسط صورة أولًا :: لفرصة أنه الجذر ل $م$

$$\Leftarrow ل = \frac{س^2 + س - ٢٤}{س + ١} = \frac{س^2 + س - ٢٤ + ٢٤ - ٢٤س + ٢٤س}{س + ١} = \frac{(س - ٢٤)(س + ٢٤)}{(س + ١)(س - ١)} = \frac{س - ٢٤}{س - ١} \times \frac{س + ٢٤}{س + ١}$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1} \times \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1} \times \frac{x-1}{x-1} = \frac{x-1}{(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{(x-1)^2} \Rightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{(x-1)^2} \Rightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{(x-1)^2}$$

$$\therefore \text{المعادلة هي } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

* * * ترتيب * * *
* * * كونه المعادلة التربيعية التي جذراها :-

مكتبة وسام
شريف - شارع حسي مبارك - خلف الثانوية بنات
01004423597.3943035

$$(1) \quad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$(2) \quad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$(3) \quad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

* * * تكوّن معادلة تربيعية بعلومية معادلة تربيعية أخرى

مثال ٥ :- إذا كان لـ $x^2 - 1 = 0$ جذرا المعادلة $x^2 - 1 = 0$ أوجد المعادلة التي

$$\text{جذراها } x^2 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} 1 &= p \\ 7 &= q \\ 3 &= r \end{aligned}$$

الحل :- * تحل أي مسألة من هذا النوع بالخطوات التالية :-

$$\text{المعادلة المطلوبة :- } * \text{ مجموع الجذور } = \frac{c}{a} \Rightarrow 7 = \frac{c}{1} \Rightarrow c = 7$$

$$* \text{ حاصل ضربهم } = \frac{d}{a} \Rightarrow 3 = \frac{d}{1} \Rightarrow d = 3$$

$$\text{المعادلة المطلوبة :- } * \text{ مجموع الجذور } = \frac{c}{a} \Rightarrow 7 = \frac{c}{1} \Rightarrow c = 7$$

$$\text{الحل :- } * \text{ حاصل ضربهم } = \frac{d}{a} \Rightarrow 3 = \frac{d}{1} \Rightarrow d = 3$$

$$\therefore \text{المعادلة المطلوبة هي } x^2 - 7x + 3 = 0$$

* * * ترتيب * * *
* * * إذا كان لـ $x^2 - 1 = 0$ جذرا المعادلة $x^2 - 1 = 0$ كونه المعادلة التي

$$\text{جذراها } x^2 - 1 = 0$$

٥. بعبر المعطيات الخاصة المستخدمة في هذه المسائل :-

$$\begin{aligned} * \quad \text{لـ} + \text{م} &= \text{لـ} + \text{م} = \text{لـ} + \text{م} \\ * \quad \text{لـ} + \text{م} &= \text{لـ} + \text{م} = \text{لـ} + \text{م} \\ * \quad \frac{\text{لـ} + \text{م}}{\text{لـ}} &= \frac{1}{\text{لـ}} + \frac{1}{\text{م}} \\ * \quad \frac{\text{لـ} + \text{م}}{\text{لـ}} &= \frac{\text{لـ} + \text{م}}{\text{لـ}} = \frac{1}{\text{لـ}} + \frac{1}{\text{م}} \end{aligned}$$

مثال ٥ :- إذا كان ل، م جذرا المعادلة $x^2 - 5x + 0 = 0$. أوجد المعادلة التي جذراها

$$\begin{aligned} \text{لـ} &= \text{م} \\ \text{لـ} &= \text{م} \\ \text{لـ} &= \text{م} \\ \text{لـ} &= \text{م} \\ \text{لـ} &= \text{م} \\ \text{لـ} &= \text{م} \\ \text{لـ} &= \text{م} \\ \text{لـ} &= \text{م} \\ \text{لـ} &= \text{م} \\ \text{لـ} &= \text{م} \end{aligned}$$

مثال ٦ :- إذا كان ل، م جذرا المعادلة $x^2 - 5x + 0 = 0$. أوجد المعادلة التي

$$\begin{aligned} \text{لـ} &= \text{م} \\ \text{لـ} &= \text{م} \\ \text{لـ} &= \text{م} \\ \text{لـ} &= \text{م} \\ \text{لـ} &= \text{م} \\ \text{لـ} &= \text{م} \\ \text{لـ} &= \text{م} \\ \text{لـ} &= \text{م} \\ \text{لـ} &= \text{م} \\ \text{لـ} &= \text{م} \end{aligned}$$

مثال ٥ :- إذا كان لـ ٢ هاجزا المعادلة $x^2 - 3x - 1 = 0$ كونه المعادلة التربيعية

التي جذراها (١) $\frac{1}{2} \text{ و } \frac{3}{2}$ (٣) $\frac{1}{2} \text{ و } \frac{3}{2}$

(٢) $\frac{1}{2} \text{ و } \frac{3}{2}$

الحل :-

المعادلة المعطاة : * مجموع الجذور $= -\frac{b}{a} = 3 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 3$

* حاصل ضربهم $= \frac{c}{a} = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -1$

← (١) المعادلة المطلوبة : * مجموع الجذور $= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -1$$

* حاصل ضربهم $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -1$

∴ المعادلة المطلوبة هي $x^2 - 2x - 1 = 0$

← (٢) المعادلة المطلوبة : * مجموع الجذور $= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

* حاصل ضربهم $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -1$

∴ المعادلة المطلوبة هي $x^2 - 2x - 1 = 0$

← (٣) المعادلة المطلوبة : * مجموع الجذور $= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -1$$

* حاصل ضربهم $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -1$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -1$$

∴ المعادلة المطلوبة هي $x^2 - 2x - 1 = 0$

* * * (١) إذا كان لـ ٢ هاجزا المعادلة $x^2 + 3x - 5 = 0$ كونه المعادلة التربيعية

التي جذراها لـ ٢

(٢) إذا كان لـ ٢ هاجزا المعادلة $x^2 + 3x - 5 = 0$ كونه المعادلة التربيعية

التي جذراها :- (١) $\frac{1}{2} \text{ و } \frac{3}{2}$ (٢) $\frac{1}{2} \text{ و } \frac{3}{2}$

مثال ٦ :- إذا كان $3 + 2\sqrt{3} + d$ لها جذري المعادلة $x^2 - 11x + 7 = 0$.

كوتر المعادلة التي جذراها $d, 3$

الحل :- المعادلة المعطاة : * مجموع الجذور $= \frac{c}{a} \Rightarrow 11 = 3 + 2 + 3 + d \Rightarrow 11 = 7 + 3 + d \Rightarrow$

$$11 = 7 + 3 + d \Rightarrow d = 1$$

$$7 = (3+2)(3+d) \Rightarrow \frac{7}{3} = \text{حاصل ضربهم} +$$

$$c = (3+d)3 + 2d \Rightarrow 7 = 9 + 3d + 2d + 2d \Rightarrow$$

$$7 = 9 + 5d \Rightarrow 5d = -2 \Rightarrow d = -\frac{2}{5}$$

∴ المعادلة المطلوبة التي جذراها $d, 3$ هي $x^2 - 11x + 7 = 0$.

$$x^2 - 11x + 7 = 0$$

* * * * *
مثال ٧ :- إذا كان $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ لها جذري المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$.
كوتر المعادلة التي جذراها $2, 3$

مثال ٨ :- إذا كان الفرق بين جذري المعادلة $x^2 - 13x + 4 = 0$ يساوي ثلاثة

أفعال حاصل ضرب جذري المعادلة $x^2 - 3x - 4 = 0$ أو جذريه

الحل :- بفرضه أنه جذري المعادلة $x^2 - 13x + 4 = 0$ هما $d, 3$

$$\begin{array}{l} 1 = p \\ 3 = b \\ 4 = c \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 = p \\ 3 = b \\ 4 = c \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 = p \\ 3 = b \\ 4 = c \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 = p \\ 3 = b \\ 4 = c \end{array}$$

∴ الفرق بين $d, 3$ يساوي ثلاثة أفعال حاصل ضرب جذري المعادلة $x^2 - 3x - 4 = 0$.

$$\begin{array}{l} 1 = p \\ 3 = b \\ 4 = c \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 = p \\ 3 = b \\ 4 = c \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 = p \\ 3 = b \\ 4 = c \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 = p \\ 3 = b \\ 4 = c \end{array}$$

$$16 = (3-d)^2 \Rightarrow 16 = 9 - 6d + d^2 \Rightarrow d^2 - 6d - 7 = 0$$

$$9 = 16 - 6d + d^2 \Rightarrow 9 = 16 - 6d + d^2 \Rightarrow d^2 - 6d - 7 = 0$$

$$16 = 9 + 6d + d^2 \Rightarrow 16 = 9 + 6d + d^2 \Rightarrow d^2 + 6d - 7 = 0$$

مثال ٨) أوجد المعادلة التربيعية التي جذورها ضعف جذري المعادلة التربيعية

$$\begin{array}{l|l} c=p \\ \sqrt{-}=b \\ 0=q \end{array}$$

$$x^2 - 5x + 0 = 0$$

الحل :- لفرصه جذري المعادلة المعطاه هما ل، م

$$x = \frac{b}{a} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x = \frac{c}{a} = \frac{p}{1} = p \Rightarrow x = p$$

∴ المعادلة المطلوبة جذورها ضعف جذري المعادلة المعطاة ∴ جذورها هم ٠، ٢٢

$$\text{مجموع الجذور} = x + c = (0 + p) = p = 22$$

$$\text{حاصل ضربهم} = x \times c = 0 \times p = 0$$

$$\therefore \text{المعادلة المطلوبة لها } x^2 - 22x + 0 = 0$$

مثال ٩) أوجد المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يزيد بقدر ١ عن كل من

$$\text{جذري المعادلة } x^2 - 5x + 9 = 0$$

الحل :- لفرصه جذري المعادلة المعطاه هما ل، م

$$\begin{array}{l|l} 1=p \\ \sqrt{-}=b \\ 9=q \end{array}$$

$$x = \frac{b}{a} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x = \frac{c}{a} = \frac{9}{1} = 9 \Rightarrow x = 9$$

∴ المعادلة المطلوبة جذورها يزيد بقدر ١ عن جذري المعادلة المعطاه

$$\therefore \text{جذري المعادلة المطلوبة هما } 1 + 0, 1 + 9$$

$$\text{مجموع الجذور} = x + c = 1 + 0 + 1 + 9 = 10$$

$$\text{حاصل ضربهم} = (1 + 0)(1 + 9) = 9 = x \times c = 1 + 9 + 0 + 0 = 10$$

$$\therefore \text{المعادلة المطلوبة لها } x^2 - 10x + 10 = 0$$

تأديده على "تكوينه المعادلة التوزيعية من علم جذراها"

□ اكمل ما يأتي :-

(١) المعادلة التي جذراها ٥-٣ هـ هـ

(٢) المعادلة التي جذراها ٤ ٤ ٣ هـ هـ

(٣) المعادلة التي مجموع جذريها = ٣ وحاصل ضربها = ٥ هـ هـ

(٤) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ فإنه ب = هـ

(٥) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ فإنه ل + م = هـ ل + م = هـ

□ كونه المعادلة التوزيعية التي جذراها :-

(١) $x^2 - ٤x + ٤ = ٠$ (٤) $x^2 - ١x + ١ = ٠$

(٢) $x^2 - ٤x + ٤ = ٠$ (٥) $x^2 - ٣x + ٣ = ٠$

(٣) $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ (٦) $x^2 - ٣x + ٣ = ٠$

□ (١) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م

(٢) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م

(٣) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م

(٤) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م

(٥) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م

(٦) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م

(٧) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م

(٨) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م

(٩) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م

(١٠) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م

(١١) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م

(١٢) إذا كان $x^2 + 3x + 2 = 0$ كونه المعادلة التي جذريها x_1, x_2 هما جذرا المعادلة $x^2 - 11x + 3 = 0$ كونه المعادلة التي جذريها x_1, x_2

(١٣) إذا كان $x^2 - 2x + 1 = 0$ كونه المعادلة التي جذريها x_1, x_2 هما جذرا المعادلة $x^2 + 5x + 7 = 0$ كونه المعادلة التي جذريها x_1, x_2

٤ كونه المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يساوي نصف نظيره من جذري المعادلة $x^2 - 5x + 7 = 0$

٥ كونه المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يساوي مربع نظيره من جذري المعادلة $x^2 + 3x - 5 = 0$

٦ إذا كان $x^2 - 5x + 7 = 0$ كونه المعادلة التربيعية $x^2 + 3x + 2 = 0$ كونه المعادلة التي جذريها x_1, x_2 هما جذرا المعادلة $x^2 - 11x + 3 = 0$ كونه المعادلة التي جذريها x_1, x_2

٧ إذا كان $x^2 - 5x + 7 = 0$ كونه المعادلة التي جذريها x_1, x_2 هما جذرا المعادلة $x^2 + 3x + 2 = 0$ كونه المعادلة التي جذريها x_1, x_2

ثم كونه المعادلة التي جذريها x_1, x_2 هما جذرا المعادلة $x^2 + 3x + 2 = 0$ كونه المعادلة التي جذريها x_1, x_2

٨ إذا كان $x^2 - 5x + 7 = 0$ كونه المعادلة التي جذريها x_1, x_2 هما جذرا المعادلة $x^2 + 3x + 2 = 0$ كونه المعادلة التي جذريها x_1, x_2

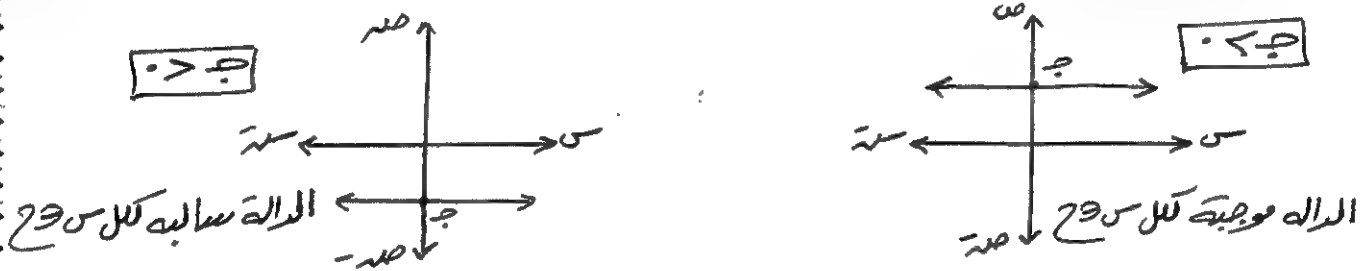
أو جذر المعادلة التي جذريها x_1, x_2 هما جذرا المعادلة $x^2 + 3x + 2 = 0$ كونه المعادلة التي جذريها x_1, x_2

١٦ "إشارة الدالة"

* المقصود بجث إشارة الدالة هو معرفة الفترات التي تكون فيها الدالة موجبة والفترات التي تكون فيها الدالة سالبة والفترات التي تكون فيها الدالة تساوي صفر.

أولاً: "إشارة الدالة الثابتة"

إشارة الدالة الثابتة د حيث $d > 0$ ، ج ثابت $\neq 0$ ، نفس إشارة ج لكل x و $d < 0$ ، إشارة ج سالبة لكل x و



مثال ١: اكتب إشارة كل من الدوال الآتية :-

(١) $f(x) = 5$ و (٢) $f(x) = -5$

(٣) $f(x) = 3$ و (٤) $f(x) = -3$

الحل :- (١) إشارة $f(x) = 5$ موجبة لكل x و (٢) إشارة $f(x) = -5$ سالبة لكل x و

(٣) إشارة $f(x) = 3$ موجبة لكل x و (٤) إشارة $f(x) = -3$ سالبة لكل x و

(٥) إشارة $f(x) = 0$ تساوي صفر لكل x و (٦) إشارة $f(x) = -0$ سالبة لكل x و

(٧) إشارة $f(x) = 0$ تساوي صفر لكل x و (٨) إشارة $f(x) = -0$ سالبة لكل x و

ثانياً: "إشارة الدالة الخطية"

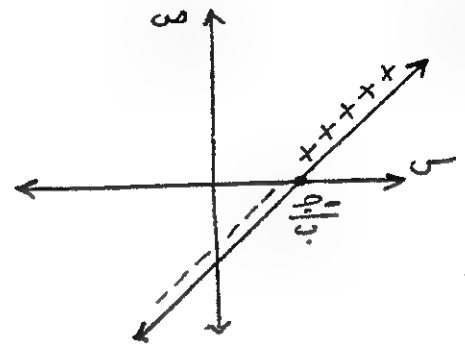
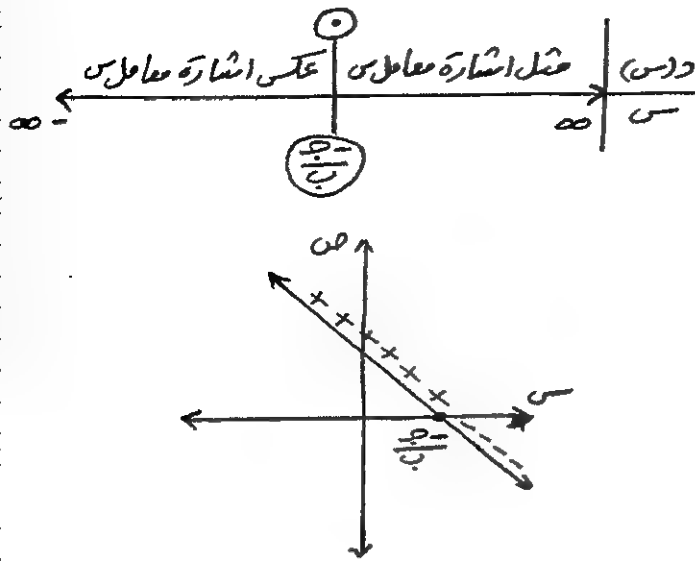
معادلة الدالة الخطية هي $ax + b = 0$ ، $a \neq 0$ ، b ثابت

بوضع $x = -\frac{b}{a}$ ، $ax + b = 0$ ، $ax = -b$ ، $x = -\frac{b}{a}$ (ب.ب)

وتكون إشارة الدالة :- (١) إشارة $ax + b$ موجبة عند $x < -\frac{b}{a}$ و سالبة عند $x > -\frac{b}{a}$ و تساوي صفر عند $x = -\frac{b}{a}$ و (٢) إشارة $ax + b$ سالبة عند $x < -\frac{b}{a}$ و موجبة عند $x > -\frac{b}{a}$ و تساوي صفر عند $x = -\frac{b}{a}$ و (٣) إشارة $ax + b$ موجبة عند $x < -\frac{b}{a}$ و سالبة عند $x > -\frac{b}{a}$ و تساوي صفر عند $x = -\frac{b}{a}$ و (٤) إشارة $ax + b$ سالبة عند $x < -\frac{b}{a}$ و موجبة عند $x > -\frac{b}{a}$ و تساوي صفر عند $x = -\frac{b}{a}$ و

وعليه أنه لعبر عن كل ما يلي :-

والشكل التالي يوضح ذلك بيانياً :-



مثال ٥ اجبت إشارة كل من الدوال الآتية :-

(١) $(x-2)(x-3) = 0$

(٢) $x+1 = 0$

مكتبة وسام
شربين، شارع حسني مبارك، خلف الثانوية بنات
01004423597-3943035

يوضع $(x-2)(x-3) = 0$

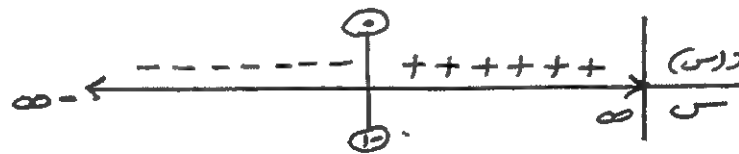
الحل :- (١) $x+1 = 0$

$x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

∴ د (س) تكون موجبة (عند إشارة معادل س) عند ما $s < -1$ أي $s \in (-\infty, -1)$

د (س) سالبة (عند إشارة معادل س) عند ما $s > -1$ أي $s \in (-1, \infty)$

د (س) = 0 عند ما $s = -1$ أي $s \in \{-1\}$

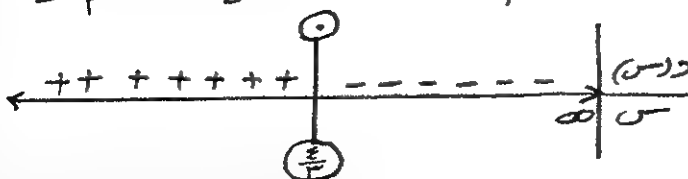


(٢) ∴ د (س) = $x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$ يوضع د (س) = 0 $\Rightarrow x = 2$

∴ د (س) سالبة (عند إشارة معادل س) عند ما $s < 2$ أي $s \in (-\infty, 2)$

د (س) موجبة (عند إشارة معادل س) عند ما $s > 2$ أي $s \in (2, \infty)$

د (س) = 0 عند ما $s = 2$



* * * ترتيب * اجب إشارة كل معادلة الدرجة :-

(1) $(س) = س - ٣$ (2) $(س) = س - ١$

ثالثاً :- "إشارة الدالة التربيعية"

لتعبير إشارة الدالة التربيعية $(س) = س^٢ + ب س + ج$. $٢ \neq ٠$

نوجد مميز المعادلة $س^٢ + ب س + ج = ٠$ وهو $ب^٢ - ٤ ج$ فإذا كان :-

١) $ب^٢ - ٤ ج < ٠$ فإنه يكون للمعادلة جذور حقيقية غير حقيقية ويكون $س > ٢$ ويكون إشارة الدالة كما يلي :-

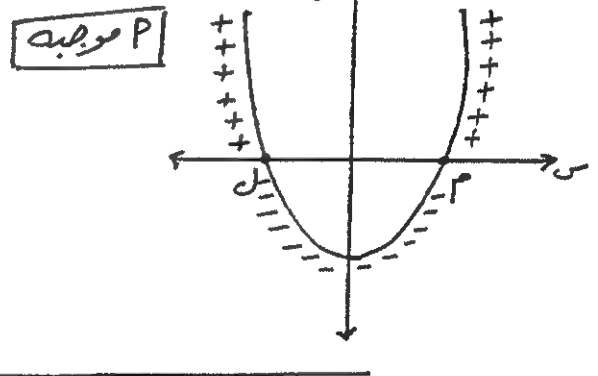
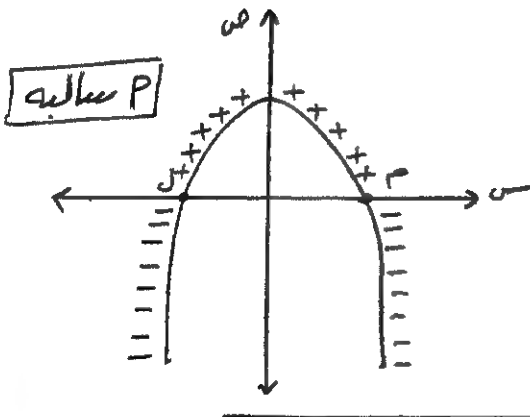
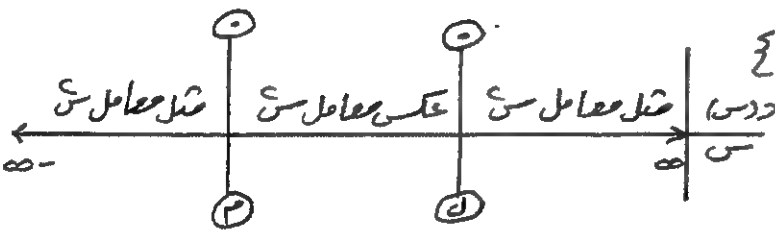
• $(س) > ٠$ مثل إشارة معامل $س$ عند $س = ٢$ - [٢، ٢]

• $(س) < ٠$ عكس إشارة معامل $س$ عند $س = ٢$ - [٢، ٢]

• $(س) = ٠$ عند $س = ٢$ - [٢، ٢]

وعليه أنه نعتبر عنظر كما يلي :-

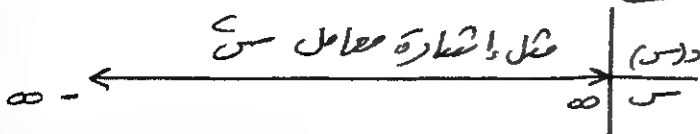
والعقل المقابل يوضع ذلك بيانياً :-

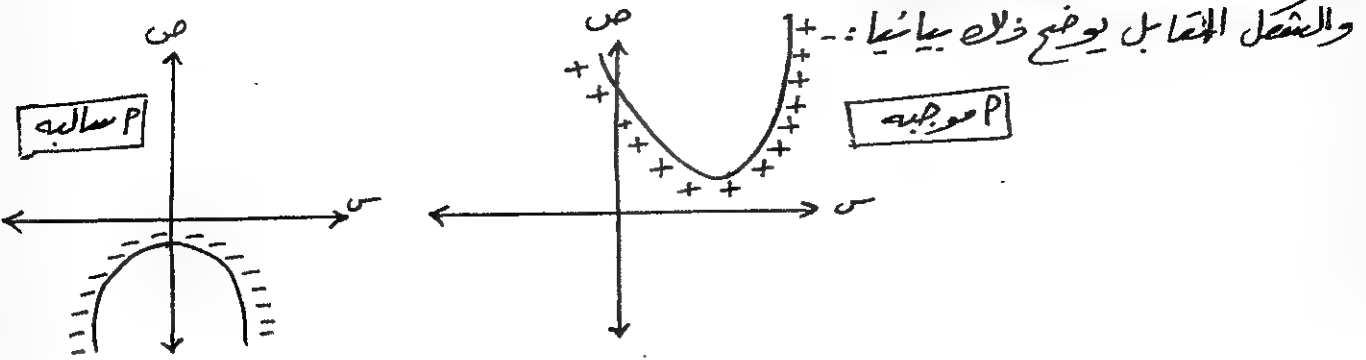


٢) $ب^٢ - ٤ ج > ٠$ فإنه لا توجد جذور حقيقية للمعادلة ويكون إشارة الدالة كما يلي :-

• $(س) > ٠$ مثل إشارة معامل $س$ لكل $س$ - [٢، ٢]

وعليه أنه نعتبر عنظر كما يلي :-

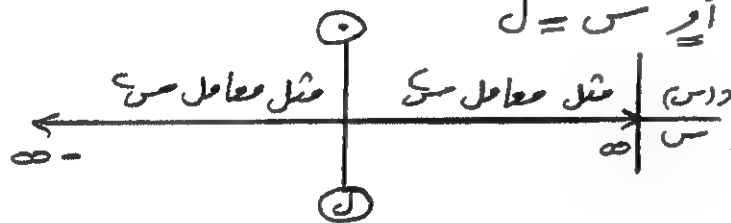




← (٣) $\Delta - 4P < 0$. فإنه يكون للمعادلة جذران حقيقيين متساويين ويكون عدد أن كل من u و v يساوي l وبالتالي تكون إشارة الدالة كما يلي :-

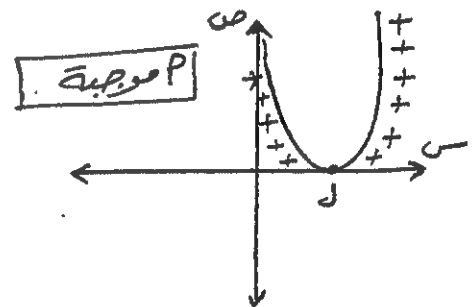
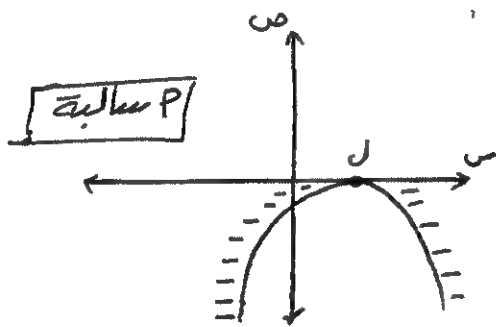
• (درج) مثل إشارة معامل $س$ عند $س = 0$ - $ل$ أو $س = ل$

• (درج) $= 0$ عند $س = 0$ أو $س = ل$



وبكلمة أنه نضع عنها كما يلي :-

والشكل المقابل يوضح ذلك بيانياً :-



مثال (٥) عيبر إشارة كل من الدوال الآتية :-

(١) (درج) $ص - ٥س + ٤$ (٢) (درج) $ص - ٥س - ١٦$

(٣) (درج) $ص = ١ + س$

الحل :- (١) (درج) $ص - ٥س + ٤$

$\Delta - 4P < 0$ $٤ - ٢٠ = -١٦ < ٠$ $٤ \times ٤ - ٢٠ = -٨$

∴ الجذرين حقيقيين مختلفين ← نوجد لها و ذلك بوضع (درج) $= 0$

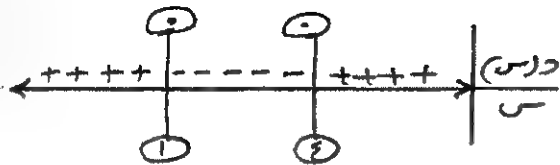
$١ = P$
 $٠ = ص$
 $٤ = س$

$$\boxed{1=s} \text{ أو } \boxed{2=s} \Leftarrow (s-1)(s-2) = 0 \Leftarrow s-2+s-1=0 \Leftarrow s-1=s-2$$

∴ (دس) تكون موجبة (مثل) عندما $s \in]2, 6[$

(دس) تكون سالبة (عكس) عندما $s \in]6, 12[$

(دس) = 0 عندما $s \in \{2, 6, 12\}$



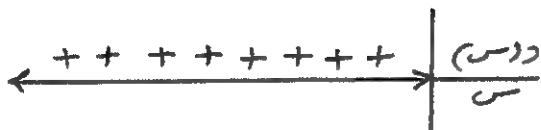
وتكتبه تحيط على خط الأعداد ←

$$\begin{array}{l} 1=p \\ 1=-b \\ 1=c \end{array}$$

$$(2) \text{ (دس) } = s-1+s-2=1$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5 > 0$$

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية



∴ (دس) تكون موجبة لكن $s \in]2, 6[$

$$1=p$$

$$8=-b$$

$$16=c$$

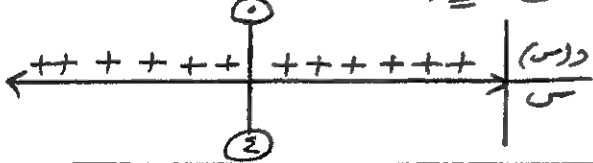
$$(3) \text{ (دس) } = s^2 - 8s + 16$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 1 \times 16 = 64 - 64 = 0$$

∴ المعادلة لها جذور حقيقية متساوية \Rightarrow نوجد لها ذللاً بوضع (دس) = 0

$$\boxed{2=s} \Leftarrow s^2 - 8s + 16 = 0 \Leftarrow (s-4)(s-4) = 0 \Leftarrow s-4=s-4$$

∴ (دس) تكون موجبة عندما $s \in]4, 12[$ أو $s \neq 4$



(دس) = 0 عندما $s = 4$

* * * نكتبه تحيط على خط الأعداد * * *

$$(1) \text{ (دس) } = s^2 - 3s + 10$$

$$(3) \text{ (دس) } = s^2 - 10s + 25$$

$$(2) \text{ (دس) } = s^2 - 3s + 3$$

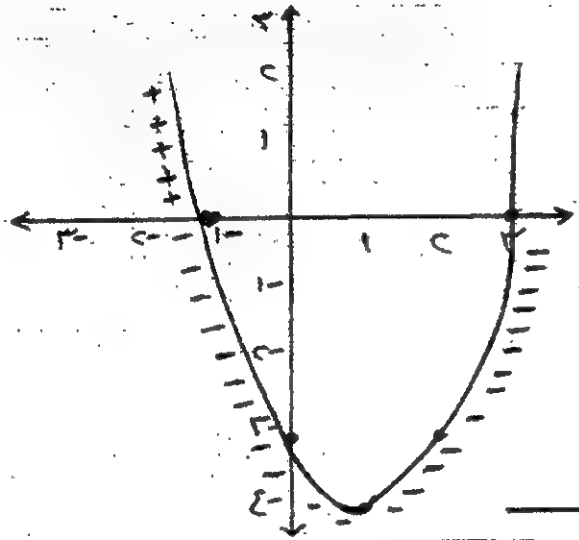
مثال ② :- مثل بيانياً د حيث $د(س) = س - س - ٣$ ثم عيبره الدرس إشارة الدالة الحل :- يمكنه إيجاد نقطة رأس المنحنى طالما لا يوجد فترة التقعر فيه

$$\text{الاحداثى السينى} = \frac{س}{١ \times س} = \frac{س}{س} = ١$$

$$\text{الاحداثى الصادى} = د(س) = (س - س - ٣) = (١ - ١ - ٣) = -٣$$

∴ نقطة رأس المنحنى هي (١، -٣) يمكنه عمل جدول كما يلي .

س	-١	٠	①	٢	٣
د(س)	٠	-٣	②	-٣	٠



عبر الدرس نلاحظ أنه :-

د(س) موجبة عندما $س < -١$ و $س > ٣$ [٣، ١]

د(س) سالبة عندما $-١ < س < ٣$ [٣، ١]

د(س) = ٠ عندما $س = -١$ و $س = ٣$ [٣، ١]

مثال ③ :- اثبت أنه لجميع قيم س $س > ٠$ يكون جذر المعادلة $س - س - ٣ = ٠$ حقيقيين مختلفين .

الحل :- يكون للمعادلة جذرين حقيقيين مختلفين إذا كان المميز $ب^٢ - ٤٠٠ > ٠$

$$س - س - ٣ = ٠ \Rightarrow س^٢ - ٣س = ٠ \Rightarrow س(س - ٣) = ٠$$

$$س = ٠ \text{ أو } س = ٣$$

$$س + (٣ - س) = ٣$$

∴ $س = ٠$ و $س = ٣$ ∴ المعادلة لها جذران حقيقيان مختلفان

* * * تدريب * * * اثبت أنه لجميع قيم س $س > ٠$ يكون جذر المعادلة $س + س - ٣ = ٠$ حقيقيين مختلفين .

تمارين على "إشارة الدالة"

■ أمل ما يأتي :-

- (١) الدالة $D(x) = -x + 5$ إشارة في
- (٢) الدالة $D(x) = x - 2$ موجبة في الفترة وسالبة في الفترة
- (٣) الدالة $D(x) = x^2 - 3x$ موجبة في الفترة وسالبة في الفترة
- (٤) الدالة $D(x) = x^2 - 6x + 9$ موجبة في الفترة
- (٥) الدالة $D(x) = (x-1)(x+2)$ موجبة في الفترة
- (٦) الدالة $D(x) = (x-3)^2$ تكون موجبة لجميع قيم x عدا
- (٧) الدالة $D(x) = x^2$ تكون موجبة في الفترة

(٨) في الشكل المقابل : دالة من الدرجة الأولى

..... موجبة في الفترة وسالبة في الفترة

(٩) في الشكل المقابل : دالة من الدرجة الثانية

$D(x) = 0$ عند $x = 0$

$D(x) < 0$ عند $x = 0$

$D(x) > 0$ عند $x = 0$

■ ابحث إشارة كل من الدوال الآتية :-

(٩) $D(x) = x^2$

(٥) $D(x) = x + 5$

(١) $D(x) = x - 2$

(١٠) $D(x) = (x-2)(x+3)$

(٦) $D(x) = x^2 - 3x + 1$

(٢) $D(x) = x^2$

(١١) $D(x) = (x-3)^2$

(٧) $D(x) = x^2 - 8x + 16$

(٣) $D(x) = x^2 - 3x$

(١٢) $D(x) = x - 1$

(٨) $D(x) = x^2 - 10x + 25$

(٤) $D(x) = x^2 - 3x$

■ (١) ارسم مخطط الدالة $D(x) = x^2 - 9$ في الفترة $[-3, 3]$ وعده الرسم ابحث إشارة الدالة

(١) اسم مفتاح الدالة $D(S) = S + S + S$ في الفترة $[56, 3]$ والبحث إشارة S

❑ إذا كانت $D(S) = S - 9$ ، $S = 1$. أو هذه الفترة التي تكونه في S ، ولها نفس الإشارة

❑ إذا كانت $D(S) = S + 1$ ، $S = 1$ في هذه الفترة التي تكونه في S ، ولها نفس الإشارة

❑ إذا كانت $D(S) = S - 3$ ، $S = 6$ ، $S = 7$ وكانت $S = 0$. البحث إشارة S

❑ أثبت أنه لجميع قيم S يكون هذا العارضة $S + S + S = 0$. حقيقة مختلفة

❑ في الفترة من عام ١٩٩٠ إلى ٢٠١٠ كان إنتاج الذهب مقدراً بالآلاف أوقية يتحدد بالدالة $D(S) = S - 967 + 10 = 0$ حيث S عدد السنوات ، وإنتاج الذهب .

أولاً :- البحث إشارة دالة الإنتاج D .

ثانياً :- خلال الأعوام من ١٩٩٠ إلى ٢٠١٠ في أي الأعوام كان إنتاج الذهب يتناقص ؟
ثالثاً :- خلال الأعوام من ١٩٩٠ إلى ٢٠١٠ في أي الأعوام كان إنتاج الذهب يتزايد ؟

(٧) "متباينة الدرجة الثانية من مجهول واحد"

* نعلم أنه ^{حل} متباينة الدرجة الأولى من مجهول واحد يعني أنه توجد جميع قيم المجهول الذي يحقق هذه المتباينة من صورة فترة .

* حل المتباينة التربيعية :- يعني إيجاد جميع قيم المجهول التي تحقق هذه المتباينة في خطوات حل متباينة الدرجة الثانية من مجهول واحد :-

(١) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بهذه المتباينة .

(٢) ندرس إشارة الدالة التربيعية ونضبط على خط الأعداد .

(٣) نجد الفترات التي تحقق المتباينة .

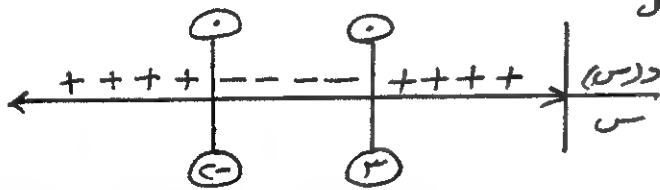
مثال ١ :- حل المتباينة $x^2 - 6x + 9 < 0$.

الحل :- الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة هي $D(x) = x^2 - 6x + 9$.
نبحث إشارة هذه الدالة كما سجد شرحه في الدرس السابق

نضع $D(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$ $(x-3)^2 = 0$ $(x-3) = 0$ $x = 3$

ونلاحظ أنه الجذرين حقيقيين مختلفين $x=3$ ، $x=3$ $[3, 3]$ ونلاحظ أنه الجذرين حقيقيين مختلفين

∴ $D(x)$ تكون إشارة على كالمين في الشكل



من الرسم :-

مجموعة حل المتباينة $=] - \infty , 3[\cup] 3 , + \infty [$

أو $]-\infty, 3[\cup] 3, +\infty[$ وهذه الفترة هي التي تحقق

مثال ٢ حل المتباينة $(x-1)^2 \geq 0$

الحل :- $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$ $(x-1)^2 = 0$ $x = 1$ $x = 1$

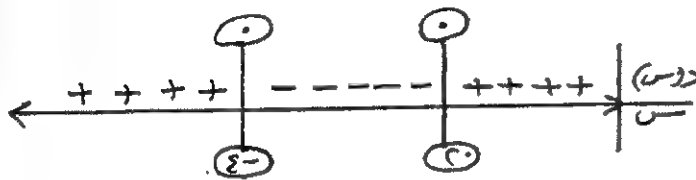
$$\therefore -s - c + 1 \geq 9 - 2s \iff s \leq -c + 8 \geq 0$$

∴ الدالة التربيعية المرتبطة بالمعادلة لها دس = $-c + 8$

$$\therefore 0 = -c + 8 = 8 - x \times 2 - 2 = 26 - c < 0$$

"المميز له قيمتان مختلفتان"

$$\text{بوضع دس} = 0 \iff s \leq -c + 8 = 0 \iff (s - 8)(s + c) = 0$$



$$\text{ومنها } \boxed{s = -c} \text{ و } \boxed{s = 8}$$

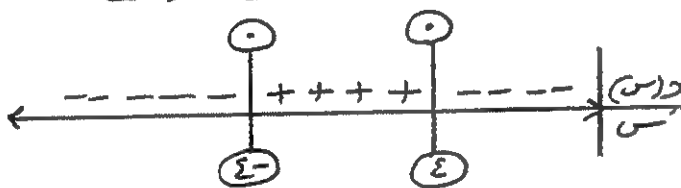
∴ دس تكون دشار على كالمين بالشكل

$$\therefore \text{مجموعة حل المعادلة} = [-c, 8]$$

$$\text{مثال ٣} \therefore \text{حل المعادلة } 16 = s$$

الحل: ∴ الدالة المرتبطة بالمعادلة لها دس = $16 = s$

$$\text{بوضع دس} = 0 \iff s = 16 \iff \frac{1-x}{s} = 16 - s \iff (s - 16)(s + c) = 0$$



$$\text{ومنها } \boxed{s = 16} \text{ و } \boxed{s = -c}$$

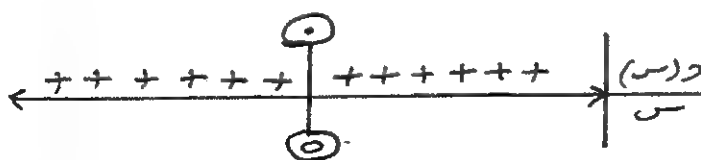
∴ دس تكون دشار على كالمين بالشكل

$$\therefore \text{مجموعة حل المعادلة} = [16, -c]$$

$$\text{مثال ٤} \therefore \text{حل المعادلة } 20 = s + c$$

$$\text{الحل: } \therefore 20 = s + c \iff \frac{1-x}{s} = 20 - s \iff s \leq 20 + c$$

$$\therefore \text{الدالة التربيعية لها دس} = 20 + c = (s - 20)(s - c) = 0$$



$$\text{ومنها } \boxed{s = 20}$$

∴ دس تكون دشار على كالمين بالشكل

$$\therefore \text{مجموعة حل المعادلة} = [20, -c]$$

مثال ٥ :- حل المتباينة $x^2 + 2 < 0$.

الحل :- الدالة التربيعية لها $(x) = x^2 + 2$

$\therefore x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-2}$ الجذور غير حقيقية

$\therefore (x)$ تكون إشارات كما بالمثل $\frac{(x)}{x}$

مجموعة حل المتباينة $x = \emptyset$

ما التفسير الذي يجب فعله من المتباينة السابقة حتى تصبح $x = \emptyset$ ؟

تمارين على "متباينة الدرجة الثانية من مجهول واحد"

١ حل المتباينات الآتية

- (١) $x^2 + 5x - 8 < 0$
- (٢) $x^2 - 1 \geq 0$
- (٣) $x^2 + 7x - 6 > 0$
- (٤) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$
- (٥) $x^2 - 5x > 0$
- (٦) $x^2 \geq 9$
- (٧) $x^2 - 3 \geq 11x + 2$
- (٨) $x^2 - 3 - 5x \leq 0$
- (٩) $x^2 + 5 \geq 1$
- (١٠) $x(x + 5) - 3 \geq 0$
- (١١) $(x + 3) - 10 > 3(x + 3)$
- (١٢) $0 - 5 \geq x^2$
- (١٣) $x^2 \leq 6x - 9$
- (١٤) $0 - 5 \geq (x - 5)^2$
- (١٥) $(x + 1) > 2(x - 1)$

تعاريف عامة

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١) مجموعة حل المعادلة $x^2 - 6x + 9 = 0$ في ح هي:

أ. $\{3\}$ ب. $\{2\}$ ج. $\{2, 3\}$ د. \emptyset
- ٢) مجموعة حل المعادلة $x^2 + 4 = 0$ هي:

أ. $\{2\}$ ب. $\{2\}$ ج. $\{2, 2\}$ د. $\{2, 2\}$
- ٣) أبسط صورة للمقدار $(1 - t)^4$ هو:

أ. -4 ب. 4 ج. $-4t$ د. $4t$
- ٤) إذا كان جذرا المعادلة $x^2 - 4x + k = 0$ حقيقيين ومختلفين فإن:

أ. $k < 4$ ب. $k > 4$ ج. $k = 4$ د. $k \leq 4$
- ٥) إذا كان جذرا المعادلة $x^2 - 12x + m = 0$ متساويين فإن م تساوي:

أ. 36 ب. -1 ج. 6 د. 36
- ٦) المعادلة التربيعية التي جذراها $2 - 3t$ ، $2 + 3t$ هي:

أ. $x^2 + 4x + 13 = 0$ ب. $x^2 - 4x + 13 = 0$ ج. $x^2 + 4x - 13 = 0$ د. $x^2 - 4x - 13 = 0$
- ٧) إذا كانت د: $[-2, 4]$ ← ح حيث د(س) = $2 - s$ فإن إشارة الدالة د سالبة في:

أ. $[-2, 2]$ ب. $[2, 4]$ ج. $[4, 2]$ د. $[2, 4]$
- ٨) إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 - (2 + m)x + 3 = 0$ معكوساً جمعياً للجذر الآخر فإن م تساوي:

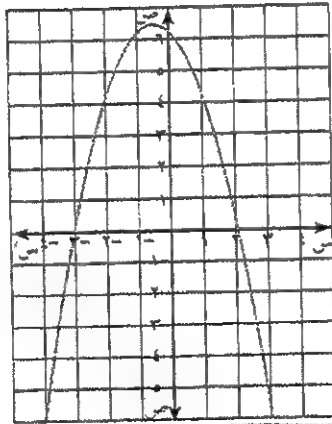
أ. -3 ب. -2 ج. 2 د. 3
- ٩) إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 + 7x + k = 0$ هو المعكوس الضربي للجذر الآخر فإن ك تساوي:

أ. -7 ب. -2 ج. 2 د. 7
- ١٠) مجموعة حل المتباينة $x^2 + s - 2 > 0$ هي:

أ. $[-2, 1]$ ب. $[-1, 2]$ ج. $[-2, 1]$ د. $[-1, 2]$

ثانياً: يمثل الشكل المقابل التمثيل البياني لدالة تربيعية د

١١) أكمل ما يأتي:



- أ. مدى الدالة د هو
- ب. القيمة العظمى للدالة د =
- ج. نوع جذري المعادلة د(س) = ٠ هو
- د. مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ هي
- هـ. د(س) < ٠ عندما س ⊇
- و. د(س) > ٠ عندما س ⊇
- ز. د(س) = ٠ عندما س =

تمارين عامة

١٢ اكتب قاعدة الدالة التي تمر بالنقاط $(١, ٢)$ ، $(٠, ٢)$ ، $(٠, ٣)$

١٣ تفكير ناقده :

أ اكتب نقاط تقاطع منحنى الدوال التي قاعدتها $ص = س^٢$ ، $ص = س$

ب اكتب نقاط تقاطع منحنى الدوال التي قاعدتها $ص = -س^٢$ ، $ص = -س$ ماذا تلاحظ؟ فسر إجابتك.

ثالثاً: أجب عن الأسئلة الآتية

١٤ بين نوع جذرى كل معادلة مما يأتي، ثم أوجد مجموعة حل كل معادلة.

أ $س^٢ - ٢س = ٠$ ب $(س - ١)^٢ = ٤$ ج $س^٢ - ٦س + ٩ = ٠$

د $س^٢ + ٣س - ٢٨ = ٠$ هـ $٦س(س - ١) = ٦ - س$

١٥ حل المعادلات الآتية باستخدام القانون العام مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين.

أ $س^٢ + ٤س + ٢ = ٠$ ب $س^٢ - ٣(س - ٢) = ٥$

١٦ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية في مجموعة الأعداد المركبة.

أ $س^٢ + ٩ = ٠$ ب $س^٢ + ٢س + ٢ = ٠$ ج $س^٢ + ٤س + ٥ = ٠$

١٧ أوجد قيمة أ، ب في كل مما يأتي :

أ $(٣ - ٧) - (٢ + ت) = أ + ب ت$ ب $(٥ - ٢)(٣ + ت) = أ + ب ت$

ج $أ + ب ت = \frac{١}{٢ + ت}$ د $أ + ب ت = \frac{٦ - ت}{٢ - ت}$

١٨ أوجد قيمة م في كل مما يأتي :

أ إذا كان جذرا المعادلة $س^٢ + م س + ١٨ = ٠$ متساويين

ب إذا كان أحد جذرى المعادلة $س^٢ + ٣س + ك = ٠$ ضعف الجذر الآخر

١٩ ابحث إشارة الدالة د في كل مما يأتي :

أ د(س) = $س^٢ - ٢س - ٨$ ب د(س) = $٤ - ٣س - س^٢$

٢٠ أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

أ $س^٢ - س - ١٢ < ٠$ ب $س^٢ - ٧س + ١٠ \geq ٠$

اختبار الوحدة

أولاً: الاختيار من متعدد :

١. مجموعة حل المعادلة $s^2 - 4s - 4 = 0$ في ح هي:

- أ {٢-} ب {٢} ج {٢، ٢-} د ϕ

٢. حل المتباينة $s^2 + 9 < 6s$ في ح هي:

- أ ح ب ح- {٢} ج [٢، ٣-] د ح- [٣، ٢-]

٣. جذرا المعادلة $s^2 - 5s + 3 = 0$:

- أ حقيقتان متساويتان ب حقيقتان مختلفتان ج مركبان د مركبان ومترافقان

٤. المعادلة التربيعية التي جذراها (١+ ت)، (١- ت) هي:

- أ $s^2 - 2s + 2 = 0$ ب $s^2 + 2s - 2 = 0$ ج $s^2 + 2s + 2 = 0$ د $s^2 - 2s - 2 = 0$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية

٥. إذا كان $(3+1)s^2 + (1-2)s + 4 = 0$ فأوجد قيمة أ في كل من الحالات الآتية:

- أ أحد جذري المعادلة معكوس جمعي للجذر الآخر.

ب مجموع جذري المعادلة يساوي ٦.

٦. أ إذا كان $\frac{2}{m}$ ، $\frac{2}{n}$ هما جذرا المعادلة $s^2 - 6s + 4 = 0$ فأوجد المعادلة التي جذراها ل، م.

ب ابحث إشارة الدالة د، حيث $D(s) = 8 - 2s - s^2$

٧. أ أثبت أن جذري المعادلة $s^2 + 3 = 5s$ حقيقتان مختلفتان، ثم أوجد مجموعة حل المعادلة في ح مقرباً الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

ب أوجد حل المتباينة: $s^2 - 5s - 14 \geq 0$

٨. تطبيقات فيزيائية: أطلق صاروخ رأسياً إلى أعلى بسرعة ٩٨ متر/ثانية، إذا كانت العلاقة بين المسافة المقطوعة ف بالمر والزمن ن بالثانية تعطى بالعلاقة: $F = 98 - 4.9N$ فأوجد:

- أ المسافة التي يقطعها الصاروخ في ثانيتين.

ب الزمن الذي يستغرقه الصاروخ حتى يقطع مسافة ٤٧٠،٤ متراً. بما تفسر وجود إجابتين؟

اختبار تراكمي

١ أوجد قيمة ك التي تجعل للمعادلة $س^٣ + ٤س + ك = ٠$ جذرين :

- أ حقيقيين متساويين
 ب حقيقيين مختلفين
 ج مركبين

٢ أوجد قيمة ك التي تجعل:

- أ أحد جذري المعادلة $س^٢ - كس + ك + ٢ = ٠$ ضعف الجذر الآخر.
 ب أحد جذري المعادلة $س^٢ - كس + ٨ = ٠$ يزيد عن الجذر الآخر بمقدار ٢.
 ج أحد جذري المعادلة $س^٢ - كس + ٣ = ٠$ يزيد عن المعكوس الضربي للجذر الآخر بمقدار ١.

٣ إذا كان ل، م جذري المعادلة $س^٢ - ٣س + ٢ = ٠$ فأوجد معادلة الدرجة الثانية التي جذراها:
 أ $س^٢ - ٣س + ١ = ٠$ ب $س^٢ - ٤س + ١ = ٠$ ج $س^٢ - ٥س + ١ = ٠$ د $س^٢ - ٦س + ١ = ٠$

٤ إذا كان $\frac{1}{ل}, \frac{1}{م}$ هما جذرا المعادلة $س^٦ - ٥س + ١ = ٠$ فكون المعادلة التريعية التي جذراها ل، م.

- ٥ ارسم منحنى الدالة د، حيث د(س) = $س^٢ - ٤$ في الفترة $[-٣, ٣]$ ومن الرسم عين إشارة د في هذه الفترة.
 ٦ ارسم منحنى الدالة د، حيث د(س) = $٦ - ٥س - ٤س^٢$ في الفترة $[-٣, ٢]$ ومن الرسم عين إشارة د في هذه الفترة.
 ٧ أوجد مجموعة الحل للمتباينات التريعية الآتية:

- أ $س^٢ + ٤س + ٤ > ٠$ ب $س^٢ - ٦س < ٠$ ج $(س - ٢)^٢ \leq ٩$
 د $٣ - ٢س \leq ٢س$ هـ $س^٢ \geq ١٠ - ٢٥$ و $٢س - ٧ \geq ١٥$

٨ أعمال تجارية: إذا كان عدد الوحدات المنتجة والمباعة من سلعة معينة في الأسبوع هي س مليون وحدة وكان سعر بيع الوحدة هو ع حيث $ع = ٢ - س$ ، إذا كانت التكاليف الكلية اللازمة لإنتاج س مليون وحدة في الأسبوع تعطى بالعلاقة $ت = (٣, ٠, ٥ + ٠, س)$ مليون وحدة فأوجد:

- أ دالة الإيراد الكلي (د)
 ب دالة الربح (ر)
 ج أوجد س عند مستوى ربح ٢,٠ مليون جنيه.

٩ إذا كانت $١ = ٣٦ + ت$ ، $ب = -١ - ت$ ، $ج = -٢ - ٣٦ + ت$ فأثبت أن: $ج - ب = (١ - ب) ت$

الإيداع

في الرياضيات

ثانياً:

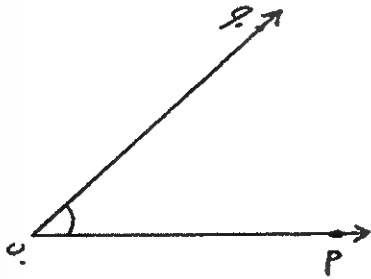
حساب المثلثات

الوحدة الثانية

- (١) الزاوية الموجهة
- (٢) القياس الستيني والقياس الدائري للزاوية
- (٣) الدوال المثلثية
- (٤) الزوايا المنتسبة
- (٥) التمثيل البياني للدوال المثلثية
- (٦) إيجاد قياس زاوية بمعلومية احدي نسبها المثلثية

تمارين عامة علي الوحدة اختبار الوحدة

١٠، "الزاوية الموجهة"



نعلم أنه: الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية.

* من الشغل المقابل: نسمي النقطة B رأس الزاوية

والشعاعين B \vec{P} ، B \vec{Q} ضلع الزاوية

أي أنه B \vec{P} لا B \vec{Q} = > P ب ج . وعليه قرأنا د ج ب P

← القياس السمين للزاوية:

وأساسة تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوسًا متساوية من الطول وعليه يكون أي زاوية

مركزة يمر ضلعها بنهايتي هذا القوس يكون قياسه درجة واحدة (١°)

← اجزاء الدرجة هي: الدقيقة (١') ، الثانية (١'')

حيث ١' = ٦٠'' ، ١'' = ٦٠'''

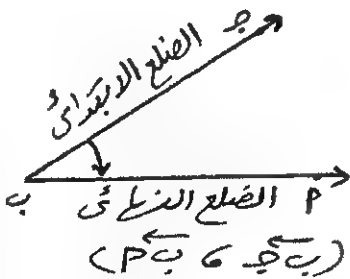
* الزاوية الموجهة:

إذا أخذنا من الاعتبار ترتيب ضلعي الزاوية بحيث يكون إحداهما هو الضلع الابتدائي

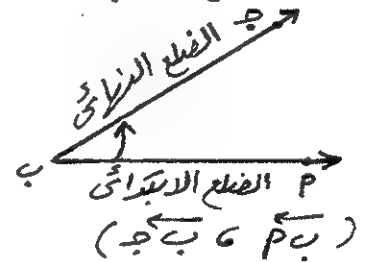
والآخر هو الضلع النهائي في هذه الحالة تكتب الزاوية على هيئة زوج مرتب

مستقيمة الأول هو الضلع الابتدائي ومستقيمة الثاني هو الضلع النهائي.

* من الشغل المقابل:



ونقرأ د ج ب P الموجهة



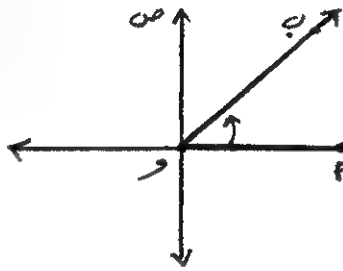
ونقرأ > P ب ج الموجهة

من الملاحظ أنه: (B \vec{P} ، B \vec{Q}) \neq (B \vec{Q} ، B \vec{P}) وبالتالي > P ب ج الموجهة \neq > ج ب P الموجهة

* تعريف:- الزاوية الموجبة :- هو زوج مرتب من اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية حيث يسى الشعاعين ضلعى الزاوية ، نقطة البداية هـ رأس الزاوية .

* الوضع القياس للزاوية الموجبة :- تكون الزاوية الموجبة في وضع القياس إذا كان :-

(١) رأسها نقطة الأصل لنظام إحداثى متعامد
(٢) ضلعها الابتدائى ينطبق على الاتجاه الموجب لمحور السينات
في الشكل المقابل :- $\angle POB$ زاوية موجبة في الوضع القياس .

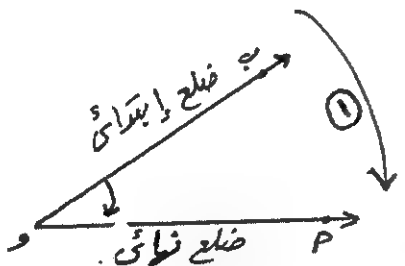


* القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجبة :-

(I) يكون قياس الزاوية الموجبة موجباً إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائى إلى الضلع النقطى في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة .

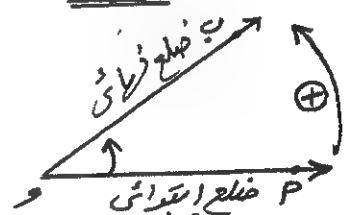
(II) يكون قياس الزاوية الموجبة سالباً إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائى إلى الضلع النقطى مع اتجاه دوران عقارب الساعة .

* في الشكل المقابل :-



$$\angle POB = (\text{وسج} \angle \text{وسج} P)$$

قياسها سالب لأنه الدوران من الضلع الابتدائى إلى النقطى مع اتجاه حركة عقارب الساعة



$$\angle POB = (\text{وسج} P \text{ وسج} \angle)$$

قياسها موجب لأنه الدوران من الضلع الابتدائى إلى النقطى عكس اتجاه حركة عقارب الساعة

ملاحظة هامة

(١) كل زاوية موجبة في الوضع القياس قياسها إما حادها موجب والآخر سالب بحيث يكون مجموع القيمة المطلقة كل منهما $= 360^\circ$.

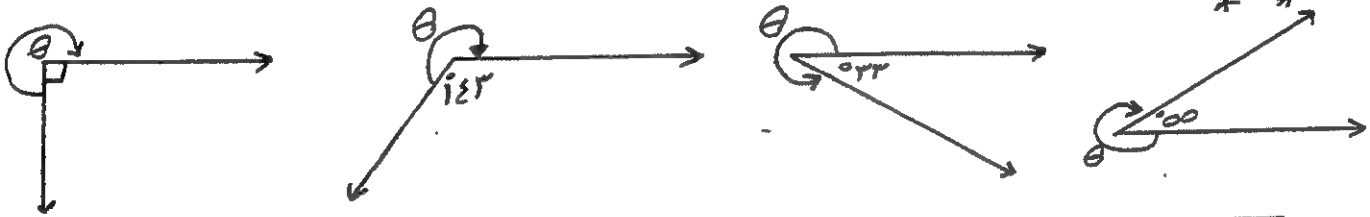
(٢) إذا كان θ هو القياس الموجب لزاوية موجبة فإما القياس السالب لها هو $(360 - \theta)$

وإذا كان θ هو القياس السالب لزاوية موجبة فإما القياس الموجب لها هو $(360 + \theta)$

مثلاً :- إذا كان قياس الزاوية $= 120^\circ$ فإما القياس السالب لها $= 360 - 120 = 240^\circ$

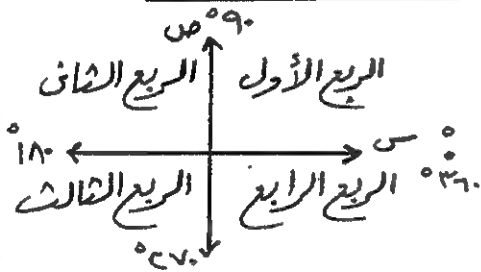
وإذا كان قياس الزاوية $= -30^\circ$ فإما القياس الموجب لها $= 360 + (-30) = 330^\circ$

* تدوين * أوجد قياس الزاوية θ الموجبة في كل من الأشكال الآتية :-

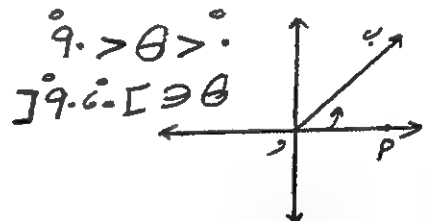


* موقع الزاوية في المستوى الإحداثي المتعامد :-

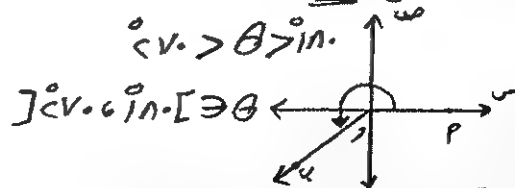
في الشكل المقابل :- يُقسَّم المستوى إلى أربعة أرباع.



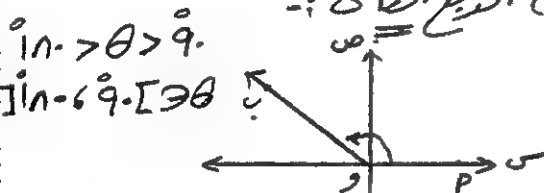
(١) الربع الأول :-



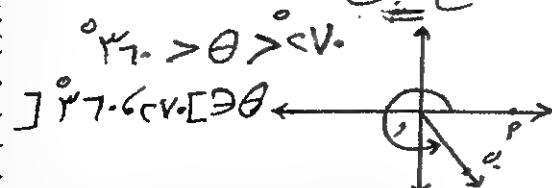
(٢) الربع الثالث :-



(٣) الربع الثاني :-



(٤) الربع الرابع :-



هــ "ملحوظة" إذا وقع الضلع النشط في زاوية على أحد محوري الإحداثيات قسم الزاوية من هذه

الحالة بالزاوية الربعية وهذه الزوايا هي: 0° ، 90° ، 180° ، 270° ، 360°

مثال ① :- عيـد الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا الآتية :-

21° ، 117° ، 135° ، 290° ، 327°

الحـ :- $21^\circ * \Leftarrow 0^\circ < 21^\circ < 90^\circ$: تقع في الربع الأول

$117^\circ * \Leftarrow 90^\circ < 117^\circ < 180^\circ$: تقع في الربع الثاني

$135^\circ * \Leftarrow 90^\circ < 135^\circ < 180^\circ$: تقع في الربع الثاني

$290^\circ * \Leftarrow 270^\circ < 290^\circ < 360^\circ$: تقع في الربع الرابع

$327^\circ * \Leftarrow$ زاوية ربعية

* * * تدريـب * * * عيـد الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا الآتية :-

11° ، 102° ، 180° ، 300° ، 190°

* الزوايا المتكافئة :- عند رسم زاوية موجبة (هــ) من الوضع القياسي فإن

جميع الزوايا التي قياسها $0^\circ \pm 360^\circ$ ، $360^\circ \pm 360^\circ$ ، ، $360^\circ \pm 360^\circ$

هي 0° من أي نوع لـ نفس الضلع النشط وتسمى زوايا متكافئة

أي أنه :- الزوايا المتكافئة هي الزوايا الموجبة من الوضع القياسي التي لها نفس الضلع النشط

وبالتالي :- أي زاوية لـ عدد لا نسبي من الزوايا المتكافئة لـ ومحصل عليه

مجموع أو طرح 360° من الزاوية أو مضاعفات 360° .

مثلا :- الزاوية التي قياسها 120° تكافئ زاوية قياسها $120^\circ + 360^\circ = 480^\circ$

وأيضا تكافئ زاوية قياسها $120^\circ - 360^\circ = -240^\circ$

وأيضا تكافئ زاوية قياسها $120^\circ + 360^\circ \times 2 = 840^\circ$ وهكذا

تمارين على الزاوية الموجبة

١. أكمل ما يأتي :-

- (١) تكون الزاوية الموجبة من الوضع القياسي إذا كانت
- (٢) يقال للزاوية الموجبة من الوضع القياسي أنظر متكافئة إذا كانت
- (٣) إذا وقع الضلع النشط للزاوية موجبة على أحد محوري الإحداثيات تسمى الزاوية
- (٤) إذا كانت قياس زاوية موجبة 2π من قياس الزاوية $(\theta + 2\pi n)$ تسمى
- (٥) الزاوية التي قياسها 0° تقع في الربع -
- (٦) الزاوية التي قياسها 90° تقع في الربع -
- (٧) أصغر قياس موجب للزاوية التي قياسها 300° يساوي
- (٨) أكبر قياس سالب للزاوية التي قياسها 170° يساوي

٢. غير أصغر قياس موجب لكل من الزوايا الآتية ثم غير الربع الذي تقع فيه كل زاوية :-

- | | | | |
|----------------|----------------|---------------|----------------|
| (١) 6° | (٢) 15° | (٣) 5° | (٤) 11° |
| (٥) 15° | (٦) 78° | (٧) 9° | (٨) 17° |

٣. أوجد قياس زاوية غير أصغر موجب والآخري سالب مشترك لغير من الضلع النشط لكل من :-

- | | | |
|---------------|----------------|----------------|
| (١) 1° | (٢) 20° | (٣) 20° |
|---------------|----------------|----------------|

٤. جميع الزوايا الآتية تكافئ الزاوية 75° من الوضع القياسي عاودا الإجابة

- | | | | |
|-----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| (١) 285° | (٢) 75° | (٣) 285° | (٤) 285° |
|-----------------|----------------|-----------------|-----------------|

٥. يدور أحد لاعبي الجولف على حبل في الألعاب بزاوية قياسها 20°

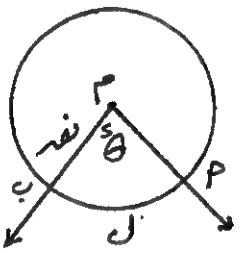
ارسم هذه الزاوية من الوضع القياسي .

(د) القياس السمين والقياس الدائري للزاوية

* القياس الدائري للزاوية :-

واساسه تقسيم الدائرة الى (٣٢) قوسًا متساوية من الطول وتسمى وحدة القياس الزاوية النصف قطرية، ويرمز له بالرمز (ا)، ويُقرأ واحد دائري " راديان " تعريف :-

القياس الدائري لزاوية مركزية من دائرة (هـ) تحصر قوسًا طوله (ل) من دائرة طول نصف قطرها (نفر) يكونه على الصورة :-



$$\begin{aligned} l &= r \times \theta \\ \theta &= \frac{l}{r} \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{l}{r} \quad \text{و منه} \quad \left\{ \begin{aligned} l &= r \times \theta \\ \theta &= \frac{l}{r} \end{aligned} \right.$$

الزاوية النصف قطرية :- هي الزاوية المركزية من دائرة والتي تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة أي $[l = r]$ وبالتالي يكونه $\theta = 1$ مثال :- الزاوية المركزية التي تحصر قوسًا طوله يساوي نصف طول نصف قطر هذه الدائرة يكونه قياسها = ؟

الحل :- $\theta = \frac{l}{r} \therefore l = r \therefore \theta = \frac{r}{r} = 1$ #
مثال :- إذا كان القياس الدائري لزاوية مركزية = ٥. فما به هذه الزاوية تحصر قوسًا من دائرة = طول نصف قطر هذه الدائرة .

الحل :- $l = r \times \theta \therefore l = 1 \times 5 = 5$ #

مثال ١ :- زاوية مركزية من دائرة طول نصف قطرها ٥ سم تحصر قوس طوله ٢٥ سم أو به قياسها بالتقدير الدائري

الحل :- $\theta = \frac{l}{r} \therefore \theta = \frac{25}{5} = 5$ راديان

مثال ٥ :- زاوية مركزية قياسها $1,3^\circ$ تحصر قوسًا طوله 3 كم . أوجد طول قطر الدائرة ومساحة الدائرة ومحيطها لأقرب رقم عشري.

الحل :- $\theta = 1,3^\circ$ $c = 3 \text{ كم}$

$$\therefore \text{نفر} = \frac{c}{\theta} = \frac{3}{1,3} = \text{نفر} = 2,30769 \text{ نفر} \therefore \text{طول القطر} = 10 \times 2,30769 = 23,0769 \text{ كم}$$

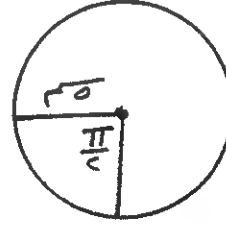
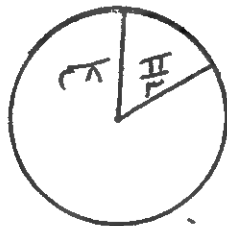
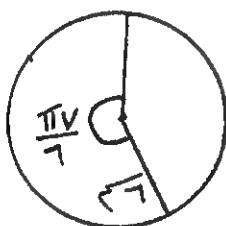
$$\therefore \text{مساحة الدائرة} = \text{طنفة} = 10 \times \frac{2,30769}{2} = 11,53845 \text{ كم}^2$$

$$\therefore \text{محيط الدائرة} = 2 \times \text{طنفة} = 10 \times 2,30769 \times 2 = 46,1538 \text{ كم}$$

* * * تدريب * (١) زاوية مركزية تحصر قوسًا طوله 8 كم في دائرة طول قطرها 10 كم . أوجد قياسها بالتقدير الدائري . * *

(٢) زاوية مركزية قياسها c° تحصر قوسًا طوله 11 كم . أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة ومساحتها .

مثال ٥ :- أوجد طول القوس الذي يحصر الزاوية المطلوبة في كل من الدوائر الآتية مقربًا الخارج لأقرب جزء من عشرة .



$$\text{الحل :- (١) طول القوس} = \theta \times \text{نفر} = 5 \times \frac{\pi}{3} = 5,235987756 \text{ كم}$$

$$(٢) طول القوس = \theta \times \text{نفر} = 8 \times \frac{\pi}{4} = 6,283185307 \text{ كم}$$

$$(٣) طول القوس = \theta \times \text{نفر} = 6 \times \frac{\pi}{2} = 9,424777961 \text{ كم}$$

* العلاقة بين إقياس السنين وإقياس الدائري :-

إذا كان إقياس زاوية بالتقدير الدائري = θ^s ، إقياسها بالتقدير السنين = s^s

فإنه $\frac{s^s}{\theta^s} = \frac{180}{\pi}$ ومنه :- $\theta^s = \frac{1}{180} \times s^s$ حيث $\frac{180}{\pi} = \frac{57.3}{1}$

ومنه :- $s^s = \frac{180}{\pi} \times \theta^s$

ملاحظة

(١) $\frac{\pi}{6}^s = 30^\circ$ $\frac{\pi}{3}^s = 60^\circ$ $\frac{\pi}{2}^s = 90^\circ$ $\frac{2\pi}{3}^s = 120^\circ$ $\frac{3\pi}{4}^s = 135^\circ$ $\frac{\pi}{2}^s = 90^\circ$

(٢) إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوي الواحد فإن الدائرة تسمى "دائرة الوحدة" ويكون $\theta^s = 1$

مثال (٤) :- أوجد بالراوي إقياس إقياس الدائري لأقرب ربع عشر من الزوايا التي إقياسها كالتالي :- (١) 1.0 (٢) 1.5 (٣) 1.7 2.7 3.7

الحل :-

(١) $\theta^s = \frac{1}{180} \times s^s \Rightarrow \theta^s = \frac{1}{180} \times 1.0 = 0.555^\circ$

(٢) $\theta^s = \frac{1}{180} \times s^s \Rightarrow \theta^s = \frac{1}{180} \times 1.5 = 0.833^\circ$

مثال (٥) :- أوجد إقياس السنين لكل من الزوايا الآتية

(١) 30° (٢) 45° (٣) 60°

الحل :-

(١) $s^s = \frac{180}{\pi} \times \theta^s \Rightarrow s^s = \frac{180}{\pi} \times 30^\circ = 5400$

(٢) $s^s = \frac{180}{\pi} \times \theta^s \Rightarrow s^s = \frac{180}{\pi} \times 45^\circ = 8100$

* * * * *
 * * * * *
 * * * * *
 * * * * *
 * * * * *

هذه ملحوظة :-

(١) π بالتقدير الدائري تكافئ 180° بالتقدير الستيني

فمثلاً :- $\frac{3}{4}\pi$ تكافئ $135^\circ = 180 \times \frac{3}{4}$

$\frac{1}{4}\pi$ تكافئ $45^\circ = 180 \times \frac{1}{4}$

(٢) إذا علم القياس الستيني لزاوية وطلب تحويلها إلى القياس الدائري بـ π

نستخدم القانون $\theta^\circ = \frac{\pi}{180} \times \text{القياس الستيني}$ ولا نعوضه عن π

فمثلاً :- 36° تكافئ $\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{180} \times 36$

135° تكافئ $\frac{3}{4}\pi = \frac{\pi}{180} \times 135$

مثال ٦ :- زاوية مركزية قياسها 80° من دائرة طول نصف قطرها ٥ سم. أوجد

طول القوس الذي تحصره لأقرب سم

الحل :- $\theta^\circ = 80^\circ$ ، $r = 5$ سم

$\therefore \theta^\circ = \frac{\pi}{180} \times 80 = \frac{4\pi}{9}$

$\therefore l = r \times \theta = 5 \times \frac{4\pi}{9} = \frac{20\pi}{9}$ سم

مثال ٧ :- أوجد محيط الدائرة التي بـ زاوية محيطية قياسها 30° وتجاهاها

قوس طوله ٥ سم

الحل :- \therefore قياس الزاوية المحيطية $= 30^\circ$ \therefore قياس الزاوية المركزية $= 60^\circ$

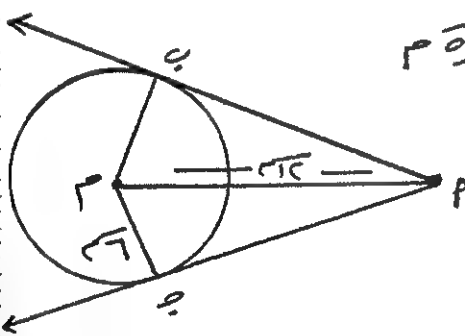
$\theta^\circ = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

$$\therefore \text{محيط الدائرة} = 2\pi r = 10\pi \text{ سم}$$

$$i n \cdot = \frac{1 n \cdot}{\pi} \times \frac{c c}{v} = 0 \ll \frac{s c c}{v} = r \frac{1}{v} \therefore \underline{\underline{0}}$$

$\sigma_{1.0} = \sigma$ (تحت) $\sigma_{1.0} = \sigma$ (بالجمع) $\sigma_{1.0} = \sigma + \sigma \therefore$
 $\sigma_{2.0} = \sigma$ $\sigma_{2.0} = \sigma - \sigma$

بالتقويس في المعادلة الأولى $\Leftrightarrow 1.0 = v + n_0 \Leftrightarrow v_0 = v$
 \therefore عم (ش) بالدائري $= 1.0 \times \frac{v}{n_0} = 0.83$ و a
 \therefore عم (ش) بالدائري $= v_0 \times \frac{v}{n_0} = 0.31$ و a



٢٢ = اسم فاعل طول القوس بـ جـ الاكبر

إذا علم أنه طول نصف قطر الدائرة $m = 6$

الحل :-

$\therefore P \rightarrow Q$, $P \leftrightarrow Q$: $P \rightarrow Q$, $P \leftrightarrow Q$

$$\varphi \vdash (p \supset q) = \varphi \vdash (p \supset \neg \neg q)$$

∴ $\rho = \frac{1}{2}$ ∴ $\rho = (\hat{P}_M) = \frac{1}{2}$ "صلوات اللّٰه علیہ وسلم"

$$\therefore \text{ن} (ب\hat{م}ج) = 20 \times 2 = 40^\circ$$

$$\therefore \text{ن} (ب\hat{م}ج) = 40^\circ = (90^\circ + 90^\circ + 90^\circ) - 180^\circ = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

$$\therefore \text{ن} (د ب م ج) \text{ المنقلة} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{180} \times 140^\circ = \frac{140}{180} \times \pi = \frac{7}{9} \pi \approx 2.44 \text{ راديان}$$

$$\therefore \text{ل} = \theta \times \text{ن} = 2.44 \times 6 = 14.64 \text{ كم} \leftarrow \text{ل} = 6 \times 2.44 = 14.64 \text{ كم} \leftarrow \text{طول ج} \text{ الأكبر} = 14.64 \text{ كم}$$

مثال ١٠ :- قمر صناعي يدور حول الأرض في مسار دائري دورة كاملة كل ٣ ساعات وإذا كان طول نصف قطر الأرض يبلغ تقريبًا ٦٤٠٠ كم وبعد القمر عن سطح الأرض ٣٦٠٠ كم أوجد المسافة التي يقطعها القمر خلال ساعة واحدة تقريبًا الناتج لأقرب كم.

الحل :-

$$\therefore \text{طول نصف قطر دائرة مسار القمر} = P_3$$

$$\therefore P_3 = P_2 + P_1 = 6400 + 3600 = 10000 \text{ كم}$$

القمر يقطع لمسار الدائري "دورة كاملة" في ٣ ساعات وهذا يقابل زاوية مركزية $360^\circ (\pi \text{ راديان})$

القمر يقطع حوسًا طوله $\frac{1}{3}$ محيط الدائرة في الساعة الواحدة

وهذا يقابل زاوية مركزية $120^\circ (\frac{2\pi}{3} \text{ راديان})$

$$\therefore \text{ل} = \theta \times \text{ن} = \frac{2\pi}{3} \times 10000 = 20944 \text{ كم}$$

* تدرب * يدور أحد لاعبي الجباز على جهاز الألعاب بزاوية قياس 90° *
* اشرح هذه الزاوية في الوضع القياسي وأوجد قياسها بالنقد *
الدائري

تمارين على "مروية قياس الزاوية"

أولاً: اختيار من متعدد:

١) الزاوية التي قياسها 60° في الوضع القياسي تكافئ الزاوية التي قياسها:

- أ 120° ب 240° ج 300° د 420°

٢) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{3}$ تقع في الربع:

- أ الأول ب الثاني ج الثالث د الرابع

٣) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{4}$ تقع في الربع:

- أ الأول ب الثاني ج الثالث د الرابع

٤) إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم تساوى $180^\circ (n-2)$ حيث n عدد الأضلاع، فإن قياس زاوية الخمس المنتظم بالقياس الدائري تساوى:

- أ $\frac{\pi}{3}$ ب $\frac{\pi}{4}$ ج $\frac{\pi}{5}$ د $\frac{\pi}{6}$

٥) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{3}$ قياسها الستيني يساوى:

- أ 10° ب 21° ج 42° د 84°

٦) إذا كان القياس الستيني لزاوية هو 64° فإن قياسها الدائري يساوى:

- أ $0,18\pi$ ب $0,36\pi$ ج $0,18\pi$ د $0,36\pi$

٧) طول القوس في دائرة طول قطرها ٢٤ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها 30° يساوى:

- أ 2π سم ب 3π سم ج 4π سم د 5π سم

٨) القوس الذى طوله 5π سم في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها يساوى:

- أ 30° ب 60° ج 90° د 180°

٩) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث 70° وقياس زاوية أخرى فيه $\frac{\pi}{4}$ فإن القياس الدائري للزاوية الثالثة

يساوى:

- أ $\frac{\pi}{4}$ ب $\frac{\pi}{6}$ ج $\frac{\pi}{3}$ د $\frac{5\pi}{12}$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

١٠ أوجد بدلالة π القياس الدائري للزوايا التي قياساتها كالاتي:

أ ٢٢٥°	ب ٢٤٠°
ج ١٣٥°	د ٣٠٠°
هـ ٣٩٠°	و ٧٨٠°

١١ أوجد بالراديان القياس الدائري للزوايا التي قياساتها كالاتي، مقرباً الناتج لثلاثة أرقام عشرية:

أ ٥٦,٦°	ب ٢٥١,٨°	ج ٤٨° ٥٠' ١٦٠"
---------	----------	----------------

١٢ أوجد القياس الستيني للزوايا التي قياساتها كالاتي، مقرباً الناتج لأقرب ثانية:

أ ٥٠,٤٩°	ب ٢٣,٢٧°	ج ٩٣,١°
----------	----------	---------

١٣ إذا كانت θ زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم وتحصر قوساً طوله ل :

أ إذا كان $\theta = ٢٠^\circ$ سم، $\theta = ٢٠^\circ$ أوجد ل. (لأقرب جزء من عشرة)

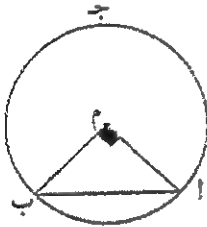
ب إذا كان $\theta = ٢٧,٣^\circ$ سم، $\theta = ٢٧,٣^\circ$ أوجد ل. (لأقرب جزء من عشرة)

١٤ زاوية مركزية قياسها ١٥٠° وتحصر قوساً طوله ١١ سم، احسب طول نصف قطر دائرتها (لأقرب جزء من عشرة)

١٥ أوجد القياس الدائري والقياس الستيني للزاوية المركزية التي تقابل قوساً طوله ٨,٧ سم في دائرة طول نصف قطرها ٤ سم.

١٦ الربط بالهندسة: مثلث قياس إحدى زواياه ٦٠° وقياس زاوية أخرى منه يساوي $\frac{\pi}{٤}$ أوجد القياس الدائري والقياس الستيني لزاويته الثالثة.

١٧ الربط بالهندسة: دائرة طول نصف قطرها ٤ سم، رسمت \triangle أ ب ج المحيطية التي قياسها ٣٠° أوجد طول القوس الأصغر $\widehat{أ ب}$



١٨ الربط بالهندسة: في الشكل المقابل إذا كان مساحة المثلث م أ ب

القائم الزاوية في م = ٣٢ سم^٢ فأوجد محيط الشكل مقرباً الناتج لأقرب

رقمين عشرين

مكتبة وسام

شربين - شارع حسي مبارك - خلف الثانوية بنات

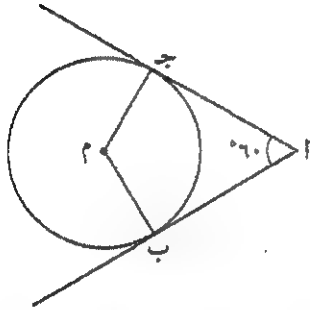
01004423597_3943035

١٩) الربط بالهندسة: \overline{AB} قطر في دائرة طوله ٢٤ سم، رسم الوتر \overline{AC} بحيث كان $\angle C = 50^\circ$. أوجد طول القوس الأصغر \widehat{AC} مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين.

٢٠) مسافات: كم المسافة التي تقطعها نقطة على طرف عقرب الدقائق خلال ١٠ دقائق إذا كان طول هذا العقرب ٦ سم؟

٢١) فلك: قمر صناعي يدور حول الأرض في مسار دائري دورة كاملة كل ٦ ساعات، فإذا كان طول نصف قطر مساره عن مركز الأرض ٩٠٠٠ كم، فأوجد سرعته بالكيلومتر في الساعة.

٢٢) الربط بالهندسة: في الشكل المقابل:



\overline{AB} ، \overline{AC} مماسان للدائرة م، و، $\angle BAC = 60^\circ$ ، $AB = 12$ سم. أوجد لأقرب عدد صحيح طول القوس الأكبر \widehat{BC} .

٢٣) الربط بالزمن: تستخدم المزولة الشمسية لتحديد الوقت أثناء النهار من خلال طول الظل الذي يسقط على سطح مدرج لإظهار الساعة وأجزائها، فإذا كان الظل يدور على القرص بمعدل 15° لكل ساعة.



أ أوجد قياس الزاوية بالراديان التي يدور الظل عنها بعد مرور ٤ ساعات.

ب بعد كم ساعة يدور الظل بزاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ راديان؟

ج مزولة طول نصف قطرها ٢٤ سم، أوجد بدلالة π طول القوس الذي يصنعه دوران الظل على حافة القرص بعد مرور ١٠ ساعات.

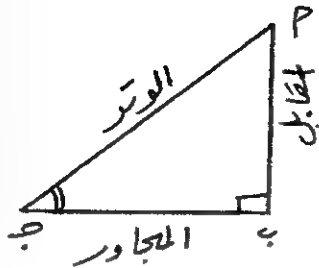
٢٤) تفكير ناقد: مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ راديان في الوضع القياسي لدائرة الوحدة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. أوجد معادلة هذا المستقيم.

٣) الدوال المثلثية

تعريف :- نعلم أنه :- من أي مثلث ABC قائم من B يكون :-

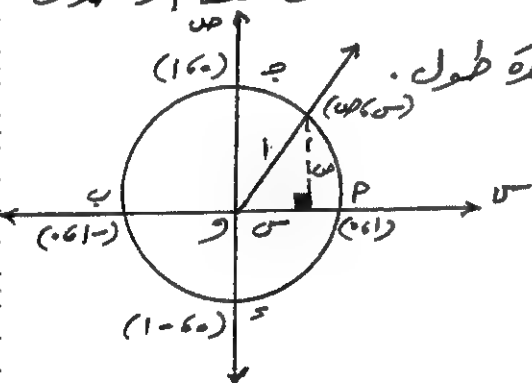
$$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AC} \quad \cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{BC}{AB}$$



أي أنه :- النسبة المثلثية للزاوية الحادة بنسبة ثابتة لا تتغير إلا إذا تغير قياس زاوية.

دائرة الوحدة :- دائرة الوحدة هي دائرة مركزها نقطة الأصل لنظام إحداثي



متساو و طول نصف قطرها يساوي وحدة طول .

• دائرة الوحدة تقطع محاور السينات في النقطتين

$P(1,0)$ و $B(0,-1)$ وتقطع محاور الصادات

في النقطتين $J(0,1)$ و $K(-1,0)$

⊗ إذا كانت $(\cos \theta, \sin \theta)$ هما إحداثيا أي نقطة على دائرة الوحدة فإنه

$\sin \theta \in [-1, 1]$

$\cos \theta \in [-1, 1]$

"محدد فيثاغورث"

(هوية)

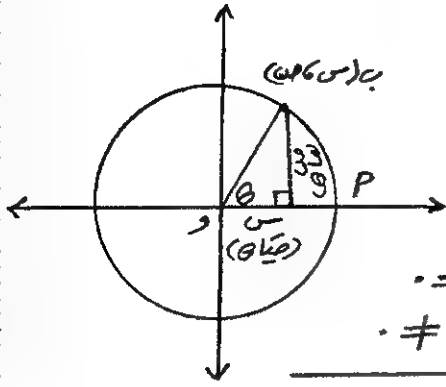
$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

الدوال المثلثية الأساسية للزاوية :-

لأي زاوية موجهة من الوضع القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في

النقطة $B(\cos \theta, \sin \theta)$ وقياسها θ يملك تعريف الدوال الآتية :-

(١) جيب الزاوية $\theta =$ الإحداثي الصادي للنقطة $B \Leftarrow \sin \theta$



(١) جيب تمام الزاوية θ = الإحداثي السيني للنقطة ب

$$\leftarrow \boxed{\text{جبا} \theta = \text{س}}$$

(٢) ظل الزاوية θ = $\frac{\text{الإحداثي الصادي}}{\text{الإحداثي السيني}}$

$$\leftarrow \boxed{\text{ظا} \theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}}} \quad , \quad \text{ظا} \theta = \frac{\text{صا} \theta}{\text{جبا} \theta} \quad , \quad \text{جبا} \theta \neq 0$$

من "ملحوظة" (١) يتلَب (س، ص) لأي نقطة على دائرة الوحدة على الصورة (جبا θ ، صا θ)

مثال: إذا كانت النقطة $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ هي نقطة تقاطع الضلع النشط للزاوية موجبة قياسها θ مع دائرة الوحدة فإنه:-

$$\text{جبا} \theta = \frac{5}{13} \quad , \quad \text{صا} \theta = \frac{12}{13} \quad , \quad \text{ظا} \theta = \frac{\text{صا} \theta}{\text{جبا} \theta} = \frac{12}{5}$$

(٢) الزوايا المكافئة لـ نفس الدوران المثلثية .

مثال: جتا 30° = جبا $(360^\circ - 30^\circ)$ = جبا 30° "حيث 30° تكافئ 30° "

مقلوبات الدوران المثلثية :-

لأي زاوية موجبة من الوضع القياس وضلعوط النشط تقطع دائرة الوحدة من النقطة ب (س، ص) إذا كان قياس الزاوية θ فإنه:-

(١) تقاطع الزاوية θ : $\text{صا} \theta = \frac{1}{\text{جبا} \theta} = \frac{1}{\text{جبا} \theta}$ ، حيث $\text{جبا} \theta \neq 0$

(٢) تقاطع تمام الزاوية θ : $\text{جبا} \theta = \frac{1}{\text{صا} \theta} = \frac{1}{\text{صا} \theta}$ ، حيث $\text{صا} \theta \neq 0$

(٣) ظل تمام الزاوية θ : $\text{ظا} \theta = \frac{\text{صا} \theta}{\text{جبا} \theta} = \frac{1}{\text{جبا} \theta} = \frac{1}{\text{جبا} \theta}$ ، حيث $\text{جبا} \theta \neq 0$

مثال ⑤ :- أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ المرسومة في الموضع إقياس وضلعها الزاوي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P في كل ما يأتي :-

(1) $P(1, 0)$ (2) $P(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ (3) $P(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ (4) $P(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

الحل :-

(1) $P(1, 0) \Rightarrow \cos \theta = 1$ $\sin \theta = 0$

$\cos \theta = 1$ $\sin \theta = 0$

$\cos \theta = 1$ $\sin \theta = 0$ (غير معرف)

(2) $P(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ $\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$

$\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$ $\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$

$\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$ $\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$

$\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$ $\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$

$\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$ $\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$

$\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$ $\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$

(3) $P(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ $\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$

$\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$ $\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$

$\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$ $\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$

$\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$

$\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$ $\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$

$\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$

$\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$

$\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$

$\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$

مثال ⑥ :- إذا عرفت الزاوية الموضحة في الموضع إقياس والتي قياسها θ النقطة

ب $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ على دائرة الوحدة حيث P . أوجد جميع الدوال المثلثية

ثم أوجد $\cos \theta + \sin \theta$.

الحل :- :- لأي نقطة على دائرة الوحدة $1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta \Leftrightarrow 1 = \sec^2 \theta \cos^2 \theta \Leftrightarrow 1 = \sec^2 \theta \cdot \frac{1}{\sec^2 \theta} \Leftrightarrow 1 = (\sec^2 \theta) + (\sec^2 \theta) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta} \Leftrightarrow 0 < \sec^2 \theta \quad \frac{1}{\cos^2 \theta} \pm = \frac{1}{\cos^2 \theta} \pm = \sec^2 \theta$$

$$(\frac{1}{\cos^2 \theta} - \sec^2 \theta) = (\frac{1}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\cos^2 \theta} - \sec^2 \theta \times \frac{1}{\cos^2 \theta}) \Leftrightarrow (\sec^2 \theta - \sec^2 \theta) = 0$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta$$

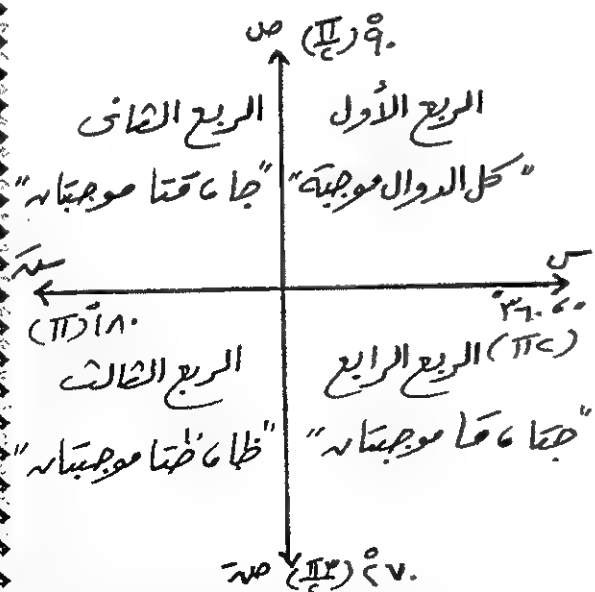
$$\# \text{ II} = \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} = (\frac{1}{\cos^2 \theta}) + (\frac{1}{\cos^2 \theta}) = \sec^2 \theta + \sec^2 \theta \Leftrightarrow$$

* تدوين * أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ المرسومة في الوضع القياسي وضلعها النشط يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب حيث :-

$$(1) \text{ ب } (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \quad (2) \text{ ب } (0, 1) \quad (3) \text{ ب } (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \quad (4) \text{ ب } (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

إشارة الدوال المثلثية :-

الربع	الفترة لـ تقع فيها الزاوية	إشارة لدوال المثلثية		
		جا	جتا	ظا
الأول	$[0, \frac{\pi}{2}]$	+	+	+
الثاني	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	-	-	+
الثالث	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	+	-	-
الرابع	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$	-	+	-



مثال ٣ :- حدد إشارة الدوال الآتية :-

ح.١٠ ، ج.٤٠ ، ظ.١٠ ، ق.٣٠ ، ق.٣٠ ، ق.٣٠ ، ج.٩٠

الحل :- * : ١٠ تقع في الربع الأول

* : ٤٠ تقع في الربع الثالث

* : ١٠ تقع في الربع الثالث

* : ٣٠ تقع في الربع الرابع

* : $\frac{180 \times 5}{3} = 300$ (الزاوية) $\frac{180 \times 5}{3} = 300$ تقع في الربع الرابع

* : ٣٠ ككاف ٣٠ - ٣٠ = ٠ (الرابع) ٣٠ - ٣٠ = ٠ سالبة

* : ٩٠ ككاف ٩٠ - ٩٠ = ٠ (الثالث) ٩٠ - ٩٠ = ٠ سالبة

* * * حدد إشارة الدوال الآتية :-

ح.١٠ ، ج.٤٠ ، ظ.١٠ ، ق.٣٠ ، ق.٣٠ ، ج.٩٠

مثال ٣ :- إذا كان الضلع المنطري لزاوية θ من وضعت القياس يقطع دائرة

الوحدة في النقطة ب (٦.٠ - ٨.٠) فأوجد قيمة $\sin \theta$ و $\cos \theta$ [٣٦.٠ ٩٧.٠]

ثم أوجد $\tan \theta$ ، $\cot \theta$ ثم اكتب قيمة $\csc \theta + \sec \theta$

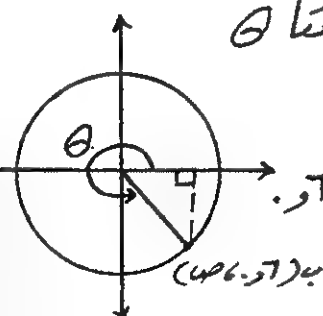
الحل :- لأي نقطة على دائرة الوحدة $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

:- (٦.٠ - ٨.٠) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ $\Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - 0.6^2 = 0.8$

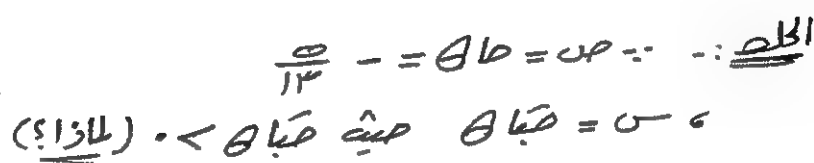
$\Rightarrow \cos \theta = \pm 0.8$

:- θ [٣٦.٠ ٩٧.٠] تقع في الربع الرابع :- $\sin \theta$ سالبة

:- $\cos \theta = 0.8$ $\Rightarrow \cos \theta = 0.8$ (٦.٠ - ٨.٠)



مثال ٥ :- إذا كانت $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ وكان $\frac{\sin \theta}{13} = \frac{\sin 2\theta}{5}$ أوجد $\cos \theta$



$$1 = \left(\frac{\sigma}{\mu}\right) + \theta \hat{k}_p \therefore 1 = \hat{\sigma} + \hat{\sigma} \therefore$$

$$\frac{182}{179} = \frac{CO}{179} - 1 = 0 \text{ kPa} \leftarrow 1 = \frac{CO}{179} + 0 \text{ kPa} \therefore$$

$$\therefore \text{جواب} = \frac{19}{13} \neq \frac{15}{13} \leftarrow \text{جواب} = \frac{15}{13} \text{ (لأنه لا تقع ضمن اربع)} \quad (114 \quad 111)$$

$$\# \frac{10}{0} - = \frac{\theta \psi}{\theta \psi} = \theta \psi \leftarrow \text{منفرد}$$

* تدريجه * (۱۲) * إذا كانت ه قياس زاوية في الموضع القياس حيث

$\frac{\pi}{2} > \theta > 0$ ، $\frac{\pi}{2} = \theta$ ، $\theta = 0$ ، $\theta = \pi$ ، $\theta = \frac{3\pi}{2}$

(c) إذا كانت $\theta > \theta_{in} > \theta_{cr}$ وكانت $\theta > \theta_{cr}$ فإن $\frac{d}{dt} = 0$

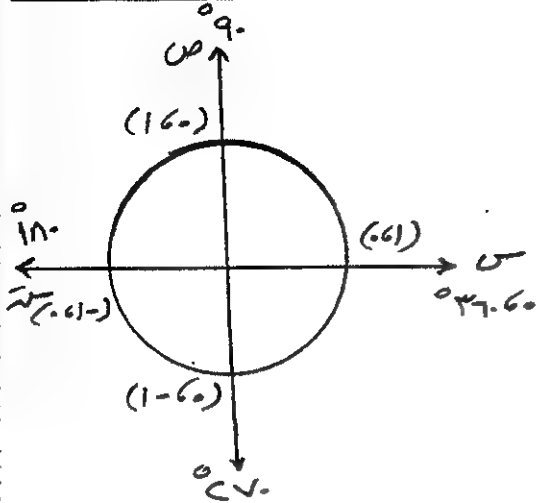
أوجد جميع النقط المنطقية للزاوية θ

مكتبة وسام

شرین۔ شارع حسنی مبارک۔ خلف الثاقبۃ بنات

01004423597_3943035

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة :-



مع العلم أنه $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}$

* 0°	← (1, 0)	جنا	ظا
* 90°	← (0, 1)	غير معروف	غير معروف
* 180°	← (-1, 0)	صند	صند
* 270°	← (0, -1)	غير معروف	غير معروف
* 30°	← ($\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
* 60°	← ($\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
* 30°	← ($\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

وبحسب نتائج ذلك في الجدول التالي :-

ملاحظة

يتم إيجاد

هذه الدوال

المثلثية باستخدام

الآلة الحاسبة

حيث

صنا ← sin

صبا ← cos

ظا ← tan

مثال : صنا

⇒ sin(30°)

= $\frac{1}{2}$

قياس زاوية θ	إحداثيات النقطة التي يقطعها خط المثلث مع دائرة الوحدة	قيم الدوال المثلثية		
		صنا	جنا	ظا
0° (0°)	(1, 0)	0	1	0
90° ($\frac{\pi}{2}$)	(0, 1)	1	0	غير معروف
180° (π)	(-1, 0)	0	-1	0
270° ($\frac{3\pi}{2}$)	(0, -1)	-1	0	غير معروف
30° ($\frac{\pi}{6}$)	($\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
60° ($\frac{\pi}{3}$)	($\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
30° ($\frac{\pi}{6}$)	($\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

مع العلم أنه $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}$

مثال ٥ :- برهن استخدام الآلة الحاسبة أو جد قيمته :-

$$(1) \quad 3. \text{ جا } 60^\circ + 9. \text{ جا } 30^\circ - 9. \text{ جا } 60^\circ + 3. \text{ جا } 30^\circ$$

الحل :-

$$(1) \quad 3. \text{ جا } 60^\circ + 9. \text{ جا } 30^\circ - 9. \text{ جا } 60^\circ + 3. \text{ جا } 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right) - 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\left[\frac{3}{4}\right] = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} =$$

$$(2) \quad 9. \text{ جا } 60^\circ + 3. \text{ جا } 30^\circ - 3. \text{ جا } 60^\circ + 9. \text{ جا } 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{4}$$

مثال ٧ :- أثبت أنه :- (1) $9. \text{ جا } 60^\circ + 3. \text{ جا } 30^\circ = 9. \text{ جا } 30^\circ + 3. \text{ جا } 60^\circ$

$$(2) \quad 9. \text{ جا } 60^\circ - 3. \text{ جا } 30^\circ = 3. \text{ جا } 60^\circ - 9. \text{ جا } 30^\circ$$

الحل :-

$$(1) \quad \text{الطرف الأيسر} = 9. \text{ جا } 60^\circ + 3. \text{ جا } 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$= 1 = 9. \text{ جا } 30^\circ + 3. \text{ جا } 60^\circ = \text{الطرف الأيمن} \quad \#$$

$$(2) \quad \text{الطرف الأيسر} = 9. \text{ جا } 60^\circ - 3. \text{ جا } 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\text{الطرف الأيمن} = 3. \text{ جا } 60^\circ - 9. \text{ جا } 30^\circ = 0 \quad \therefore \text{الطرفان متساويان} \quad \#$$

* * * تدريبات * * * (1) $9. \text{ جا } 60^\circ + 3. \text{ جا } 30^\circ - 3. \text{ جا } 60^\circ - 9. \text{ جا } 30^\circ$

$$(2) \quad 9. \text{ جا } 30^\circ + 3. \text{ جا } 60^\circ - 3. \text{ جا } 30^\circ - 9. \text{ جا } 60^\circ$$

* * * أثبت أنه :- (1) $9. \text{ جا } 60^\circ - 3. \text{ جا } 30^\circ = 3. \text{ جا } 60^\circ - 9. \text{ جا } 30^\circ$

$$(2) \quad 9. \text{ جا } 30^\circ + 3. \text{ جا } 60^\circ - 3. \text{ جا } 30^\circ - 9. \text{ جا } 60^\circ$$

$$(3) \quad 9. \text{ جا } 60^\circ - 3. \text{ جا } 30^\circ = 3. \text{ جا } 60^\circ - 9. \text{ جا } 30^\circ$$

❖ اخترا الإجابة الصحيحة :-

- (١) حـ موجبة
(٢) حـ سالبة
(٣) حـ موجبة
(٤) وإذا كان $\theta = \frac{1}{2}$ ، θ حادة فـ $(\hat{\theta}) = \dots$
(٥) وإذا كان $\theta = 1$ ، θ حادة فـ $\theta = \dots$
(٦) وإذا كانت $\theta = c$ ، θ حادة فـ $(\hat{\theta}) = \dots$
(٧) وإذا كانت $\theta = \frac{1}{2}$ ، $\theta = \dots$ فـ $\theta > \dots$
(٨) وإذا كان $\theta = 1$ ، θ حادة فـ $(\hat{\theta}) = \dots$
(٩) $\theta = 0$ ، $\theta = \frac{1}{2}$ ، $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\theta = 1$
(١٠) وإذا كان $\theta = \frac{1}{2}$ ، θ حادة فـ $\theta = \dots$
(١١) وإذا كان $\theta = \frac{1}{2}$ ، θ حادة فـ $(\hat{\theta}) = \dots$
(١٢) وإذا كان $\theta = \frac{1}{2}$ ، θ حادة فـ $(\hat{\theta}) = \dots$
(١٣) وإذا كان $\theta = (0 - \theta) = 1$ ، θ حادة فـ $(\hat{\theta}) = \dots$
(١٤) وإذا كانت الزاوية θ من المضلع الخامس لدائرة الوحدة يقطعها المنحني بالنقطة $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ فـ $\theta = \dots$

٥ اجبت إشارة كل منه الدوال الثلاثة الآتية :-

$$\frac{\pi c - b}{9} \in \frac{\pi q - b}{\Sigma} \in \frac{\pi q - b'}{\Sigma} \in \Sigma \cdot b \in \gamma_0 b' \in \Sigma \cdot b$$

٢ أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ والتي يمر ضلعها النقطي بالنقاط الآتية :-

$$\left(\frac{\sqrt{c}}{c} \circ \frac{\sqrt{c}}{c} \right) (r)$$
$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (c)$$
$$\left(\frac{\sqrt{10}}{3}, \frac{5}{3}\right) \quad (1)$$

٤ إذا كان θ هو قياس زاوية موجبة من الوضع القياسي ، والـ θ يمر بـ θ النقطة
بناثرة الوحدة أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ من الحالات الآتية :-

(١) $(\frac{5}{6}, \frac{1}{2})$ ، $\theta \in [0, 2\pi)$ (٢) $(\cos \theta, \sin \theta) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ، $\theta \in [0, 2\pi)$
(٣) $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ ، $\theta \in [0, 2\pi)$ (٤) $(\cos \theta, \sin \theta) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ، $\theta \in [0, 2\pi)$

٥ إذا كان الضلع النشط للزاوية θ من الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة من النقطة
ب وكان $\theta = \frac{5}{6}$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$ أوجد إحداثي ب
ثم اثبت أنه $\theta = \frac{5}{6}$.

٦ أثبت أنه النقطة ب $(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ تقع على دائرة الوحدة وأوجد θ
٧ إذا كان $\theta = c$ وكان $\theta \in [0, 2\pi)$ أوجد θ .

٨ بدو استخدام الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي :-

(١) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$ (٢) $\sin 30^\circ \times \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$
(٣) $\sin 30^\circ \times \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$ (٤) $\sin 30^\circ \times \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$
(٥) $\sin 30^\circ \times \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$ (٦) $\sin 30^\circ \times \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$
(٧) $\sin 30^\circ \times \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$ (٨) $\sin 30^\circ \times \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$

٩ اثبت صحة كل من المتساويان الآتية :-

(١) $\sin 90^\circ = \cos 0^\circ$ (٢) $\sin 90^\circ = \cos 0^\circ$
(٣) $\sin 90^\circ = \cos 0^\circ$ (٤) $\sin 90^\circ = \cos 0^\circ$
(٥) $\sin 90^\circ = \cos 0^\circ$ (٦) $\sin 90^\circ = \cos 0^\circ$
(٧) $\sin 90^\circ = \cos 0^\circ$ (٨) $\sin 90^\circ = \cos 0^\circ$

١٠ أوجد قيمة $\sin \theta$ إذا كان $\theta = \frac{5}{6}$.

(١) $\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6}$ (٢) $\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6}$
(٣) $\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6}$ (٤) $\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6}$
(٥) $\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6}$ (٦) $\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6}$
(٧) $\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6}$ (٨) $\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6}$

(١) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ (٢) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$
(٣) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ (٤) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$
(٥) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ (٦) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$
(٧) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ (٨) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$

(٤) الزوايا المنسبة

* الزاويتان المنسبتان :- هما زاويتان الفرعه بغير قياسيهما أو مجموع قياسيهما
يساوي عددًا صحيحًا واحد القوائم .

نمثلة :- * الزاويتان ٢٠° ، ٤٠° زاويتان منسبتان لـ ٢٠ - ٤٠ = ٢٠ "عائلة"
* الزاويتان ٣٠° ، ٦٠° زاويتان منسبتان لـ ٣٠ + ٦٠ = ٩٠ "عائلة"

□ الدوال المثلثية للزاويتين المنسبتين θ و $(\theta - 180^\circ)$:-

$$\begin{aligned} * \sin(\theta - 180^\circ) &= -\sin \theta & * \cos(\theta - 180^\circ) &= -\cos \theta \\ * \tan(\theta - 180^\circ) &= \tan \theta & * \cot(\theta - 180^\circ) &= \cot \theta \\ * \sec(\theta - 180^\circ) &= -\sec \theta & * \csc(\theta - 180^\circ) &= -\csc \theta \end{aligned}$$

مثال :- $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

* تدريبات * أوجد ما يأتي :- $\sin 150^\circ$ ، $\cos 150^\circ$ ، $\tan 150^\circ$ ، $\cot 150^\circ$

□ الدوال المثلثية للزاويتين المنسبتين θ و $(\theta + 180^\circ)$.

$$\begin{aligned} * \sin(\theta + 180^\circ) &= -\sin \theta & * \cos(\theta + 180^\circ) &= -\cos \theta \\ * \tan(\theta + 180^\circ) &= \tan \theta & * \cot(\theta + 180^\circ) &= \cot \theta \\ * \sec(\theta + 180^\circ) &= -\sec \theta & * \csc(\theta + 180^\circ) &= -\csc \theta \end{aligned}$$

مثال :- $\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

* تدريبات * أوجد ما يأتي :- جـا٠ع٠ ، جا٠د٠ ، قـا٠٠ ، قـا٠١٠ ، ظا٠٠ ، ظا٠١٠
* *

٢٤ الدوال المثلثية للزوايا غير المنقبة θ ، $(\theta - 360)$:-

$$* \text{جا}(\theta - 360) = \text{جا} \theta \quad * \text{قـا}(\theta - 360) = \text{قـا} \theta$$

$$* \text{قـا}(\theta - 360) = \text{قـا} \theta \quad * \text{ظا}(\theta - 360) = \text{ظا} \theta$$

$$* \text{ظا}(\theta - 360) = \text{ظا} \theta \quad * \text{ظا}(\theta - 360) = \text{ظا} \theta$$

مثال :- $\bullet \text{جا} 360 = \text{جا}(\theta - 360) = \text{جا} 0 = 1$

$\bullet \text{ظا} 360 = \text{ظا}(\theta - 360) = \text{ظا} 0 = 0$

$\bullet \text{قـا} 360 = \text{قـا}(\theta - 360) = \text{قـا} 0 = 0$

* تدريبات * أوجد ما يأتي :- جـا٠٠ ، جـا٠١٠ ، قـا٠٠ ، قـا٠١٠ ، ظا٠٠ ، ظا٠١٠
* *

٢٥ الدوال المثلثية للزوايا غير المنقبة θ ، θ :-

$$* \text{جا}(\theta) = \text{جا} \theta \quad * \text{قـا}(\theta) = \text{قـا} \theta$$

$$* \text{قـا}(\theta) = \text{قـا} \theta \quad * \text{ظا}(\theta) = \text{ظا} \theta$$

$$* \text{ظا}(\theta) = \text{ظا} \theta \quad * \text{ظا}(\theta) = \text{ظا} \theta$$

مثال :- $\bullet \text{جا} 360 = \text{جا} \theta = 1$

$\bullet \text{قـا} 360 = \text{قـا} \theta = 0$

$\bullet \text{ظا} 360 = \text{ظا} \theta = 0$

* تدريبات * أوجد ما يأتي :- جـا٠٠ ، جـا٠١٠ ، قـا٠٠ ، قـا٠١٠ ، ظا٠٠ ، ظا٠١٠
* *

مكتبة وسام

شؤون - شارع حنفى - مبارك خلف الثانوية بنات

01004423597.3943035

□ الدوال المثلثية للزاوية θ ، $(\theta - 90^\circ)$:-

$$\sin(\theta - 90^\circ) = -\cos \theta \quad \sin \theta = \cos(\theta - 90^\circ)$$

$$\cos(\theta - 90^\circ) = \sin \theta \quad \cos \theta = \sin(\theta - 90^\circ)$$

$$\tan(\theta - 90^\circ) = -\cot \theta \quad \tan \theta = -\cot(\theta - 90^\circ)$$

$$\cot(\theta - 90^\circ) = \tan \theta \quad \cot \theta = \tan(\theta - 90^\circ)$$

$$1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin(\theta - 90^\circ)}{-\cos \theta}$$

$$\sin \theta = -\cos(\theta - 90^\circ) \quad \cos \theta = \sin(\theta - 90^\circ) \quad \tan \theta = -\cot(\theta - 90^\circ) \quad \cot \theta = \tan(\theta - 90^\circ)$$

$$(1) \sin \theta = \cos(\theta - 90^\circ) \quad (2) \cos \theta = \sin(\theta - 90^\circ) \quad (3) \tan \theta = -\cot(\theta - 90^\circ) \quad (4) \cot \theta = \tan(\theta - 90^\circ)$$

□ الدوال المثلثية للزاوية θ ، $(\theta + 90^\circ)$:-

$$\sin(\theta + 90^\circ) = \cos \theta \quad \sin \theta = \cos(\theta + 90^\circ)$$

$$\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta \quad \cos \theta = -\sin(\theta + 90^\circ)$$

$$\tan(\theta + 90^\circ) = -\cot \theta \quad \tan \theta = -\cot(\theta + 90^\circ)$$

$$\cot(\theta + 90^\circ) = \tan \theta \quad \cot \theta = \tan(\theta + 90^\circ)$$

$$\sin \theta = \cos(\theta + 90^\circ) \quad \cos \theta = -\sin(\theta + 90^\circ)$$

$$\tan \theta = -\cot(\theta + 90^\circ) \quad \cot \theta = \tan(\theta + 90^\circ)$$

$$\sin \theta = \cos(\theta + 90^\circ) \quad \cos \theta = -\sin(\theta + 90^\circ) \quad \tan \theta = -\cot(\theta + 90^\circ) \quad \cot \theta = \tan(\theta + 90^\circ)$$

مثال :- إذا كانت الزاوية التي يحياها θ من الوضع الصحيح ويرض على الدائرة بالقطعة

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right) \text{ أو } \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{4}\right) \text{ أو } \left(\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}\right) \text{ أو } \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{4}\right)$$

$$\sin \theta = \frac{3}{4} \quad \cos \theta = \frac{4}{5} \quad \tan \theta = \frac{3}{4} \quad \cot \theta = \frac{4}{3} \quad \sec \theta = \frac{5}{4} \quad \csc \theta = \frac{4}{3}$$

٥ الدوال المثلثية للزوايا غير θ ، $(\theta - 70^\circ)$::

$$\sin \theta = \sin(\theta - 70^\circ) \quad * \quad \cos \theta = \cos(\theta - 70^\circ)$$

$$\sin \theta = \sin(\theta - 70^\circ) \quad * \quad \cos \theta = \cos(\theta - 70^\circ)$$

$$\sin \theta = \sin(\theta - 70^\circ) \quad * \quad \cos \theta = \cos(\theta - 70^\circ)$$

$$\text{مثال} :: \sin 40^\circ = \sin(70^\circ - 30^\circ) = \sin 70^\circ \cos 30^\circ - \cos 70^\circ \sin 30^\circ$$

$$\sin 40^\circ = \sin 70^\circ \cos 30^\circ - \cos 70^\circ \sin 30^\circ$$

$$\sin 10^\circ = \sin(70^\circ - 60^\circ) = \sin 70^\circ \cos 60^\circ - \cos 70^\circ \sin 60^\circ$$

* * * تدريبات * * * أوجد ما يأتي :: $\sin 40^\circ$ ، $\cos 40^\circ$ ، $\sin 10^\circ$

٦ الدوال المثلثية للزوايا غير θ ، $(\theta + 70^\circ)$::

$$\sin \theta = \sin(\theta + 70^\circ) \quad * \quad \cos \theta = \cos(\theta + 70^\circ)$$

$$\sin \theta = \sin(\theta + 70^\circ) \quad * \quad \cos \theta = \cos(\theta + 70^\circ)$$

$$\sin \theta = \sin(\theta + 70^\circ) \quad * \quad \cos \theta = \cos(\theta + 70^\circ)$$

$$\text{مثال} :: \sin 30^\circ = \sin(70^\circ - 40^\circ) = \sin 70^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ$$

$$\sin 30^\circ = \sin 70^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ$$

$$\sin 10^\circ = \sin(70^\circ - 60^\circ) = \sin 70^\circ \cos 60^\circ - \cos 70^\circ \sin 60^\circ$$

* * * تدريبات * * * أوجد ما يأتي :: $\sin 30^\circ$ ، $\cos 30^\circ$ ، $\sin 10^\circ$

مثال :: أوجد قيمة $\sin 80^\circ \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \sin 10^\circ$

$$\text{الحل} :: \sin 80^\circ \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \sin 10^\circ = \sin(80^\circ + 10^\circ) = \sin 90^\circ = 1$$

$$\text{مثال} :: \sin 30^\circ = \sin(70^\circ - 40^\circ) = \sin 70^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ$$

∴ قيمة المقدار حبا ١٠ جا (٣٠) - ظا ٥ = ١ + ١/٢ - ١ × ١/٢ = ١ + ١/٢ = ٣/٢

هـ "علوظه هامة"

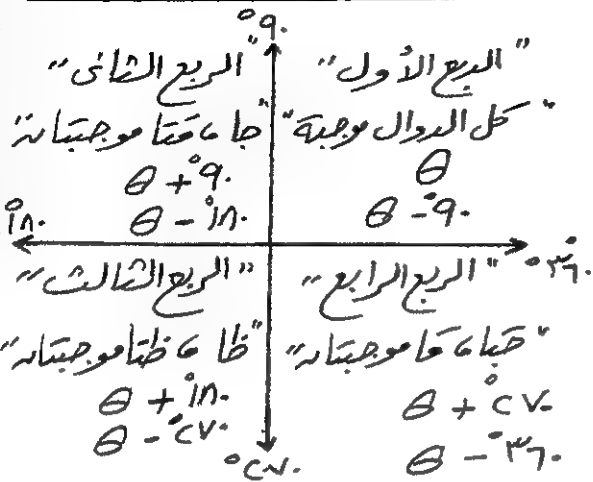
(١) يمكن تخمين ما سيعبر من الرسمة المقابلة:

(٢) الدوال المثلثية (٩٠ + θ) ، (٩٠ - θ)

(٣) (٧٠ + θ) ، (٧٠ - θ) تتغير في

الدوال المثلثية بوضع حرف القاء من الدالة التي

ليس بطل حرف القاء والعكس .



مثال ∴ أوجد بطريقتيه مختلفتين كل ما يأتي ∴ حا ١٠ ، حا ٣٠ ، حا ٥

الحل ∴

$$(١) \text{ حا } ١٠ = \text{ جا } (٩٠ + ٣٠)$$

$$= \text{ حا } ٣٠ = \frac{٣٧}{٥}$$

$$(٢) \text{ حا } ٣٠ = \frac{١١ \times ٥}{٣} = \frac{٥٥}{٣}$$

$$\text{ حا } ٣٠ = \text{ حا } (٧٠ + ٣٠)$$

$$= \text{ حا } ٣٠ = \frac{٣٧}{٥}$$

$$\text{ حا } ١٠ = \text{ جا } (٩٠ - ٨٠) = \text{ حا } ١٠$$

$$= \frac{٣٧}{٥}$$

$$\text{ حا } ٣٠ = \text{ حا } (٩٠ - ٦٠) = \text{ حا } ٣٠$$

$$= \frac{٣٧}{٥}$$

مثال ∴ بدو استخدام الحاسبة أوجد قيمة ∴

$$\text{ حبا } (١٥٠ - ٦٠) + \text{ حبا } \frac{٥}{٣} - \text{ حبا } (٣٠ - \frac{٥}{٢}) - \text{ ظا } ٩٠$$

الحل ∴

$$\text{ حبا } (١٥٠ - ٦٠) = \text{ حبا } ٩٠ = \text{ حبا } (٩٠ - ٨٠) = \text{ حبا } ١٠ = \frac{٣٧}{٥}$$

$$\text{ حبا } ٦٠ = \text{ حبا } (٦٠ - ٦٠) = \text{ حبا } ٠ = \text{ حبا } (٦٠ + ٨٠) = \text{ حبا } ١٤٠ = \frac{٣٧}{٥}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}} = 7 - \text{جبا} = (7 - i10) \text{جبا} = 10 - \text{جبا} = \left(\frac{10 \times 5}{3}\right) \text{جبا} = \left(\frac{\pi}{3}\right) \text{جبا} \therefore$$

$$\boxed{\frac{1}{2}} = 33 - \text{جا} = (30 - 33) \text{جا} = 33 - \text{جا} \therefore$$

$$\boxed{\frac{1}{2}} = 50 - \text{جا} = (50 + i10) \text{جا} = 50 - \text{جا} = \left(\frac{10 \times 5}{2}\right) \text{جا} = \frac{\pi}{2} \text{جا} = \left(\frac{\pi}{2}\right) \text{جا} \therefore$$

$$\boxed{\frac{1}{2}} = 90 - \text{ظا} = (90 - 36) \text{ظا} = 90 - \text{ظا} \therefore$$

$$\therefore \text{قيمة المقدار} = \frac{36}{2} \times \frac{36}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{36}{2} \times \frac{36}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\# \boxed{\frac{1}{2}} = 0 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} =$$

* * * ترتيب * برون استخدام الحاسبة أو جدلية : *

$$(1) \text{جا } 10 - \text{جا } 33 - \text{جا } (33 - 33)$$

$$(2) \text{جا } 90 - \text{جا } (90 - 36) + \text{جا } 50 - \text{جا } (50 - 10)$$

مثال : - إذا كانت جبا = $\frac{\pi}{6}$ حيث $90 > \theta > 180$ أو جدلية ما يأتي

$$(3) \text{جا } (\theta - 180)$$

$$(1) \text{جا } (180 - \theta)$$

$$(4) \text{ظا } (180 - \theta)$$

$$(2) \text{جا } (36 - \theta)$$

الحل : - لاني نقطة على دائرة الوحدة $\sin^2 + \cos^2 = 1$

$$\therefore \text{جا } \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{النقطة هي } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 1 = \cos^2 + \frac{17}{16} \Rightarrow 1 = \cos^2 + \frac{17}{16} \Rightarrow \frac{9}{16} = \frac{17}{16} - 1 = \cos^2$$

$$\cos = \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \pm \frac{3}{4} \therefore \theta \text{ تقع في الربع الثاني} \therefore \cos = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{جا } (180 - \theta) = \text{جا } \theta = \frac{3}{4} \therefore \boxed{\frac{3}{4}} = \text{جا } \theta = (180 - \theta) \text{جا} \therefore \boxed{\frac{3}{4}} = \text{جا } \theta = (\theta - 180) \text{جا}$$

$$\therefore \text{جا } (\theta - 180) = \text{جا } \theta = \frac{3}{4} \therefore \boxed{\frac{3}{4}} = \text{جا } \theta = (\theta - 180) \text{جا} \therefore \boxed{\frac{3}{4}} = \text{جا } \theta = (\theta - 180) \text{جا}$$

$$\theta \text{ ظا} = (\theta - 180) \text{ظا} = - \text{ظا } (\theta - 180) = - \text{ظا } \theta$$

$$\boxed{\frac{3}{4}} =$$

الوحدة في النقطة (س) $(\frac{12}{13})$ حيث $(9. > \theta > 180)$ أو هـ قـ مـ :-

١٠ "مخوفه هامه جدا"

نشان $\boxed{90^\circ = \beta + \alpha}$ حيث α, β زاویه های حاد است.

$$\dot{q} = \dot{r}_x - \theta \dot{c} + \dot{c} \dot{\lambda} + \theta \dot{r}_y \therefore (\dot{r}_x - \theta \dot{c}) \dot{\phi} = (\dot{c} \dot{\lambda} + \theta \dot{r}_y) \dot{\phi} \therefore$$

«لاحظ أنه توجد قيم أخرى تحقق المعادلة السابقة وتختصر بـ 9.6°

مثل ٨٧٦ ولا يجاد هذه القيم لا بد من حل هذا النوع من المسائل باستخدام القانون العام لتعظيم للملاحظة السابقة :-

١٠) $\alpha \in N$ $\alpha \pi c + \frac{\pi}{c} = \beta \pm \alpha \Rightarrow \alpha \pi c + \frac{\pi}{c} = \beta \pm \alpha : \alpha \pi c = \beta \pm \alpha - \frac{\pi}{c} \Rightarrow \alpha \pi c = \beta \pm \alpha - \frac{\pi}{c}$ ①

⑤ إذا $\beta \bar{a} = \alpha \bar{b}$ $\Rightarrow \beta \bar{a} + \bar{c} = \alpha \bar{b} + \bar{c} = \beta \pm \alpha$ $\Rightarrow \beta \bar{a} + \bar{c} = \beta \pm \alpha$ $\Rightarrow \beta \bar{a} + \bar{c} = \beta \pm \alpha$

$$\omega \ni \alpha \quad \alpha \Pi + \underline{\Pi} = \beta + \alpha \geq 1 \quad \alpha \Pi + \underline{\Pi} = \beta + \alpha : \alpha \beta \beta \beta = \alpha \beta \beta \beta \beta \beta \beta \beta \quad (5)$$

مثال :- أوجد الحل العام للمعادلات الآتية :-

$$(١) \quad \sin \theta = \sin 3\theta$$

$$(٢) \quad \sin \theta = \sin 2\theta$$

$$(٣) \quad \sin \theta = \sin 5\theta$$

$$(٤) \quad 1 = (\theta - \frac{\pi}{2})$$

الحل :-

$$(١) \quad \sin \theta = \sin 3\theta \Leftrightarrow \theta = 3\theta \text{ أو } \theta = \pi - 3\theta$$

$$\sin \theta = \sin 3\theta \text{ أو } \sin \theta = \sin (\pi - 3\theta)$$

$$\sin \theta = \sin 3\theta \text{ أو } \sin \theta = \sin (\pi - 3\theta)$$

$$\sin \theta = \sin 3\theta \Leftrightarrow \theta = 3\theta$$

$$\sin \theta = \sin 3\theta \Leftrightarrow \theta = 3\theta$$

∴ الحل العام هو $\theta = \frac{\pi}{2}$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$$(٢) \quad \sin \theta = \sin 2\theta \Leftrightarrow \theta = 2\theta \text{ أو } \theta = \pi - 2\theta$$

$$\sin \theta = \sin 2\theta \text{ أو } \sin \theta = \sin (\pi - 2\theta)$$

$$\sin \theta = \sin 2\theta \text{ أو } \sin \theta = \sin (\pi - 2\theta)$$

$$(٣) \quad \sin \theta = \sin 5\theta \Leftrightarrow \theta = 5\theta \text{ أو } \theta = \pi - 5\theta$$

$$(٤) \quad 1 = (\theta - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 1$$

$$\sin \theta = \sin 5\theta \Leftrightarrow \theta = 5\theta$$

$$\sin \theta = \sin 5\theta \Leftrightarrow \theta = 5\theta$$

∴ الحل العام هو $\theta = \frac{\pi}{2}$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$$(٥) \quad 1 = (\theta - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 1$$

∴ $\theta = \frac{\pi}{2} + 1$ (موجبة) ∴ تقع في الربع الأول أو الرابع

$$\frac{\pi}{2} = \theta \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ أو } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

∴ الحل العام هو $\theta = \frac{\pi}{2}$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2}$

تمارين على الزوايا المتسبة

□ أمل ما يأتي :-

(١) $\sin(\theta - 90^\circ) = \dots$

(٢) $\cos(\theta - 180^\circ) = \dots$

(٣) $\tan(\theta - 270^\circ) = \dots$

(٤) $\sec(\theta + 90^\circ) = \dots$

(٥) $\csc \theta = \dots$

(٦) $\sec \theta = \dots$

(٧) $\csc \theta = 13$ فما $\sin \theta = \dots$

(٨) $\sec \theta = 67$ فما $\cos \theta = \dots$

(٩) إذا كانت $\sin \theta = \frac{1}{2}$ حيث $0 < \theta < 90^\circ$ فما $\cos \theta = \dots$

(١٠) إذا كانت $\cos \theta = \frac{1}{2}$ فما $\sin \theta = \dots$

(١١) إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{2}$ فما $\cos \theta = \dots$

(١٢) إذا كان $\cos \theta = \frac{1}{2}$ فما $\sin \theta = \dots$

(١٣) إذا كان $\tan \theta = \frac{1}{2}$ فما $\sin \theta = \dots$

(١٤) إذا كان $\sec \theta = \frac{1}{2}$ فما $\cos \theta = \dots$

(١٥) إذا كان $\csc \theta = \frac{1}{2}$ فما $\sin \theta = \dots$

(١٦) إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{2}$ فما $\cos \theta = \dots$

□ أوجد قيمة ما يأتي :-

(١) $\sin 150^\circ + \cos 210^\circ + \tan 30^\circ = \dots$

(٢) $\sin 11^\circ + \cos 79^\circ + \tan 11^\circ = \dots$

□ أثبت أنه :- $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$

□ إذا كان الضلع المنطقي لزاوية قياسها θ هو ضلع القياس يقطع دائرة الوحدة

في النقطة $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ أوجد :-

(١) $\sin \theta$ ، (٢) $\cos \theta$ ، (٣) $\tan \theta$ ، (٤) $\csc \theta$ ، (٥) $\sec \theta$ ، (٦) $\cot \theta$

٥ أوجد إحدى قيم θ حيث $0^\circ < \theta < 90^\circ$ التي تحقق كل معر :-

(١) $\sin(10^\circ + \theta) = \sin(5^\circ - \theta)$ (٣) $\cos(30^\circ + \theta) = \sin(20^\circ + \theta)$

(٢) $\sin(10^\circ + \theta) = \cos(5^\circ + \theta)$ (٤) $\sin(20^\circ + \theta) = \cos(10^\circ + \theta)$

٦ أوجد الحل العام لكل معر المعادلات الآتية :-

(١) $\sin \theta = \sin 60^\circ$ ، (٢) $\sin \theta = \sin 120^\circ$ ، (٣) $\sin(20^\circ + \theta) = \sin(80^\circ + \theta)$

٧ أوجد جميع قيم θ حيث $\theta \in [0, \pi]$ التي تحقق كل معر :-

(١) $\sin \theta = \sin 60^\circ$ ، (٢) $\sin \theta = \sin 120^\circ$

(٣) $\sin(20^\circ + \theta) = \sin(80^\circ + \theta)$ ، (٤) $\sin(20^\circ + \theta) = \sin(80^\circ + \theta)$

٨ إذا كان $\sin \theta = \frac{3}{4}$ ، $\cos \theta = \frac{1}{4}$ ، $\tan \theta = \frac{3}{1}$ ، $\cot \theta = \frac{1}{3}$ ، $\sec \theta = \frac{4}{3}$ ، $\csc \theta = \frac{4}{1}$

أوجد أصغر قياس موجب للزاوية θ .

٩ إذا كانت الزاوية θ مرسومة في الربع الثاني حيث $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ، $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

فحل تكلية أنه يكون $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ؟ منسرا جانبا .

١٠ "المتفوق" أوجد قيمة كل مما يأتي

(١) $\sin 0^\circ + \sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \dots + \sin 80^\circ + \sin 90^\circ$

(٢) $\cos 0^\circ + \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \dots + \cos 80^\circ + \cos 90^\circ$

مكتبة وسام

فريق شاع حسي مبارك خلف الثانوي بنات

01004423597_3943035

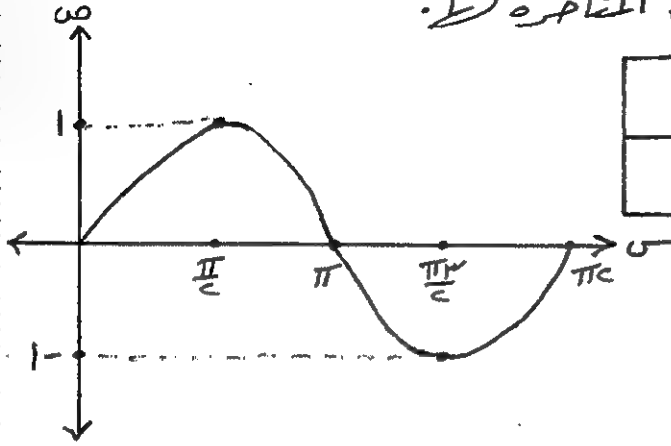
د) التحليل البياني للدوال المثلثية

□ دالة الجيب :-

لتحليل الدالة $y = \sin(x)$ نكتب جدول من بعض قيم θ

الخاصة حيث $\theta \in [0, \pi]$ وقيم $\sin \theta$ المناظرة لها .

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$	0	1	0	-1	0



نرسم منحنى الدالة كما بالشكل :-

* خواص دالة الجيب :-

(1) الدالة دورية وطول دورتها 2π .

(2) مجال الدالة $[-1, 1]$ وقيم الدالة $[-1, 1]$.

(3) القيمة العظمى للدالة تساوي 1 وذلك عندما $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

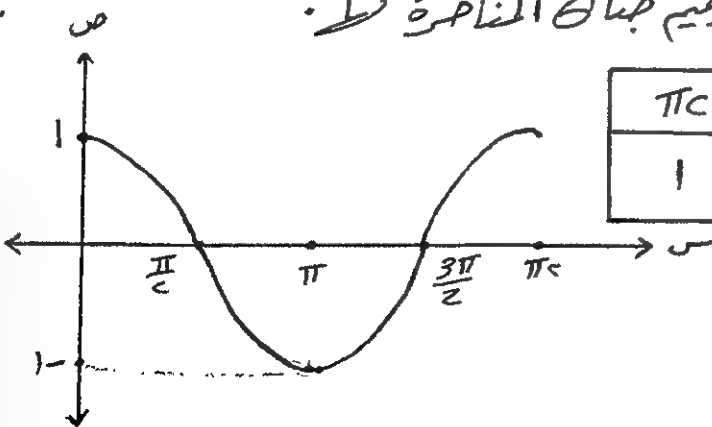
(4) القيمة الصغرى للدالة تساوي -1 وذلك عندما $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

□ دالة جيب التمام :-

لتحليل الدالة $y = \cos(x)$ نكتب جدول من بعض قيم θ

الخاصة حيث $\theta \in [0, \pi]$ وقيم $\cos \theta$ المناظرة لها .

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos \theta$	1	0	-1	0	1



نرسم منحنى الدالة كما بالشكل :-

* خواص دالة جيب التمام :-

(1) الدالة دورية وطول دورتها 2π .

(١) مجال الدالة $[-\infty, \infty]$ ومدى الدالة $[-1, 1]$

(٢) القيمة العظمى للدالة تساوي ١ وذلك عند $\theta = \pi/2$

(٣) القيمة الصغرى للدالة تساوي -١ وذلك عند $\theta = 3\pi/2$

ملحوظة هامة

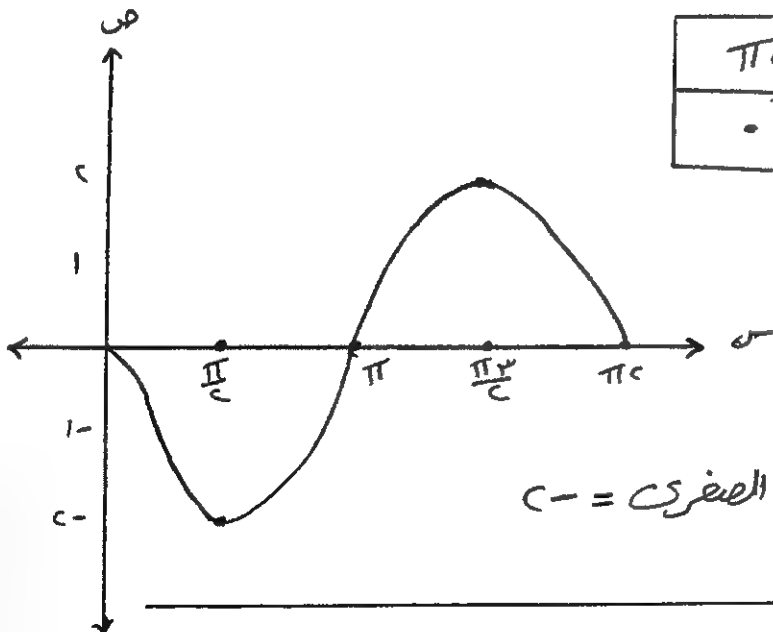
كل من الدالتين: $y = \sin x$ و $y = \cos x$ جتا x و $\sin x$ و $\cos x$ دورية ودورتها 2π ومراحها $[-1, 1]$ حيث P موجبة.

مثال: الدالة $y = \sin x$ و $y = \cos x$ و $y = \tan x$ و $y = \cot x$ و $y = \sec x$ و $y = \csc x$

الدالة $y = \sin x$ و $y = \cos x$ و $y = \tan x$ و $y = \cot x$ و $y = \sec x$ و $y = \csc x$

مثال: ارسم منحنى الدالة $y = \sin x$ على الفترة $[0, 2\pi]$

الحل:



θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$	0	1	0	-1	0

الدالة دورية ودورتها 2π

المجال $[-\infty, \infty]$

المدى $[-1, 1]$

القيمة العظمى للدالة = ١ ، القيمة الصغرى = -١

* * * ارسم منحنى الدالة $y = \cos x$ على الفترة $[0, 2\pi]$ * * *

تمارين على "رسم الدوال المثلثية"

□ أمل ما يأتي :-

- (١) مدى الدالة د حيث $D = \theta$ جـ θ هو وطول دورته
- (٢) مدى الدالة د حيث $D = \theta$ جـ θ هو وطول دورته
- (٣) القيمة العظمى للدالة ع : ع θ = جـ θ هو
- (٤) القيمة الصغرى للدالة ع : ع θ = جـ θ هو
- (٥) الدالة د $D = \theta$ جـ θ دالة دورية ودورها تساوي

□ ارسم الشكل البياني لكل من الدوال الآتية حيث $\theta \in [0, 2\pi]$
وعبر القيمة العظمى والصغرى والمدى لكل من الدوال الآتية

- | | |
|------------------------------|--------------------------|
| (١) د θ = جـ θ | (٣) ص = جـ θ |
| (٢) ص = جـ θ | (٤) ص = جـ θ |
| (٥) ص = جـ θ | (٦) ص = جـ θ + ١٠ |

"إيجاد قياس زاوية معلومة إحدى نسبتي الثلثة"

* وإذا كانت $\sin \theta = \frac{1}{2}$ فإنه يمكن إيجاد قيمة θ معلومة θ

فمثلاً: - إذا كانت $\theta = 30^\circ \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$

"والسؤال هنا" هل يمكن إيجاد θ معلومة $\sin \theta = \frac{1}{2}$!!

هناك صورة تستخدم لإيجاد θ معلومة $\sin \theta = \frac{1}{2}$:

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right)$$

فمثلاً: - إذا كانت $\sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) = 30^\circ$ فإنه

"أى نجد على الزاوية الحادة الموجهة التي جيبها يساوي $\frac{1}{2}$ و $\sin 30^\circ$

ونكتب على الحاسبة بالصورة: - $\sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) = 30^\circ$ on

مثال ①: - أوجد قيمة θ حيث $\theta > 0^\circ$ والى تحقق كل من

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| (أ) $\sin \theta = \frac{1}{2}$ | (ب) $\cos \theta = \frac{1}{2}$ | (ج) $\tan \theta = \frac{1}{2}$ |
| (د) $\csc \theta = 2$ | (هـ) $\sec \theta = 2$ | (و) $\cot \theta = 2$ |

الحل: -

(أ) جيب تمام الزاوية موجب $\therefore \theta$ تقع في الربع الأول أو الرابع

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ \text{ أو } \theta = 150^\circ$$

$$\therefore \text{قيم } \theta = 30^\circ, 150^\circ$$

(ب) ظل الزاوية موجب $\therefore \theta$ تقع في الربع الأول أو الثالث

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ \text{ أو } \theta = 300^\circ$$

$$\therefore \text{قيم } \theta = 60^\circ, 300^\circ$$

(٤) ∴ جيب الزاوية سالب ∴ تقع في الربع الثالث أو الرابع

$$\text{الثالث} \Leftarrow \theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ \quad \text{الرابع} \Leftarrow \theta = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$$

$$\therefore \text{قيم } \theta = 210^\circ \text{ أو } 330^\circ$$

(٥) ∴ $\theta = 0^\circ$ أو $\theta = 360^\circ$ ∴ $\theta = 0^\circ$ أو $\theta = 360^\circ$

∴ جيب تمام الزاوية موجب ∴ تقع في الربع الأول أو الرابع

$$\text{الأول} \Leftarrow \theta = 0^\circ \quad \text{الرابع} \Leftarrow \theta = 360^\circ - 0^\circ = 360^\circ$$

$$\therefore \text{قيم } \theta = 0^\circ \text{ أو } 360^\circ$$

(١) ∴ جيب الزاوية موجب ∴ تقع في الربع الأول أو الثاني

$$\text{الأول} \Leftarrow \theta = 0^\circ \quad \text{الثاني} \Leftarrow \theta = 180^\circ - 0^\circ = 180^\circ$$

(٦) ∴ ظل تمام الزاوية سالب ∴ تقع في الربع الثاني أو الرابع

$$\text{يستخدم الحاسبة} \leftarrow \tan^{-1}(-1) = -0.5 \text{ راديان} = -28.65^\circ \quad \text{Shift } \tan(1.6204) = 1.0$$

$$\text{الثاني} \Leftarrow \theta = 180^\circ - 28.65^\circ = 151.35^\circ \quad \text{الرابع} \Leftarrow \theta = 360^\circ - 28.65^\circ = 331.35^\circ$$

$$\therefore \text{قيم } \theta = 151.35^\circ \text{ أو } 331.35^\circ$$

* ترتيب * أوجد θ حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$ والتي تحقق كل معادلة

(١) $\sin \theta = \frac{1}{2}$ (٢) $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

(٣) $\tan \theta = 1$ (٤) $\csc \theta = 2$

مثال ٥ ∴ إذا قطع الضلع النشط لزاوية موجبة قياسها θ من وحدة الدائرية دائرة

الوحدة من النقطة ب $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ فأوجد θ حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$

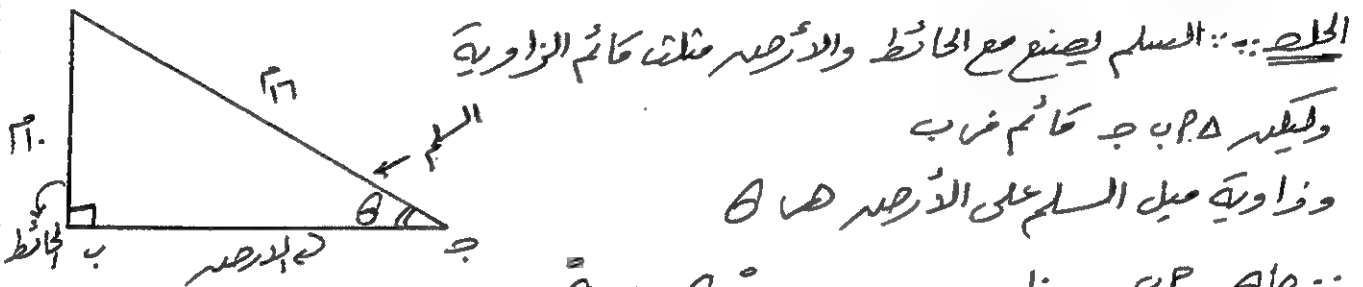
الحل ∴ ∴ النقطة ب $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ تقع في الربع الثاني ∴ $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ∴ $\theta = 53.13^\circ$ أو $\theta = 126.87^\circ$

∴ الزاوية المدمجة θ تقع في الربع الثاني

$$\therefore \cos \theta = \frac{y}{r} = \frac{-12}{13} = -\frac{12}{13} \Rightarrow \theta = \arccos\left(-\frac{12}{13}\right)$$

$$\therefore \theta = \arccos\left(-\frac{12}{13}\right) = \arccos\left(-\frac{12}{13}\right) \approx 159.69^\circ$$

مثال ٣ سلم طوله ١٦ متر يستند على حائط رأس وأرض أفقية فإذا كان ارتفاع السلم عند سطح الأرض يساوي ١٠ متر أوجد بالراديان زاوية ميل السلم على الأرض θ



$$\therefore \cos \theta = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{5}{8}\right)$$

$$\therefore \theta = \arccos\left(\frac{5}{8}\right) \approx 51.34^\circ$$

$$\therefore \theta = \arccos\left(\frac{5}{8}\right) \approx 51.34^\circ$$

تأديري على " إيجاد قياس زاوية معلومة إحدى نسب المثلث "

آلة :-

$$(1) \text{ إذا كان } \theta = 0^\circ \text{ حيث } \theta \text{ حادة موجبة فإن } \theta = 0^\circ \dots$$

$$(2) \text{ إذا كان } \theta = 180^\circ \text{ وكانت } 90^\circ < \theta < 270^\circ \text{ فإن } \theta = 180^\circ \dots$$

$$(3) \text{ إذا كانت } 270^\circ < \theta < 360^\circ \text{ فوجد } \theta \text{ التي تحقق كلا ما يأتي :-}$$

$$(1) \text{ ح } 166.3^\circ \text{ (ج) } 166.3^\circ \text{ (د) } 166.3^\circ \text{ (هـ) } 166.3^\circ$$

$$(4) \text{ إذا قطع الضلع المنطقي للزاوية } \theta \text{ من الضلع القياسي دائرة الوحدة من النقطة}$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ أوجد } \theta \text{ حيث } 270^\circ < \theta < 360^\circ$$

سالم طوله ٢٠ يستند على حائط رأس فإذا كان ارتفاع السلم عند سطح الأرض ١٣ أوجد بالراديان زاوية ميل السلم على الأرض .

تمارين عامة

أجب عن الأسئلة الآتية مقرياً الناتج لأقرب رقمين عشريين:

① حوّل الزوايا الآتية من درجات إلى راديان:

_____ ° ١٢٠ _____ ° ٦٤,٨ _____ ° ٢٢٠,٣٦

② حول الزوايا الآتية من راديان إلى درجات:

_____ $\frac{\pi}{3}$ _____ $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ _____ $\frac{\pi}{4}, 12$

③ θ زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها ١٠، وتحصر قوساً طوله ل:

_____ إذا كان $\theta = 1,2$ سم، $\theta = 1,2$ أوجد ل.

_____ إذا كان $L = 26$ سم، $\theta = 18$ سم أوجد θ بالدرجات.

④ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي:

_____ ظا ١٢٠ ° _____ جتا $(\frac{\pi}{4})$ _____ جتا ٣٠ ° _____ ظتا (-200) _____ قتا $(\frac{\pi}{4})$

⑤ أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ إذا كان الضلع النهائي مرسوماً في الوضع القياسي ويمر بكل نقطة من النقاط الآتية:

_____ (٣, ٤) _____ (١٢, -٥) _____ $(2, -\frac{2}{3})$ _____ $(2, 56)$

⑥ أثبت أن:

أولاً: جتا ٦٠ = ٢ جتا ٣٠ جتا ٣٠ حيث $90^\circ < \theta < 180^\circ$ فأوجد قيمة كل من:

ثانياً: جتا ٣٠٠ = ٢ جتا ٦٠ حيث $90^\circ < \theta < 180^\circ$ فأوجد قيمة كل من:

أولاً: جتا $(\theta - 180)$ ثانياً: ظا $(\theta - 180)$

⑦ أوجد قياس الزوايا بالدرجات في الفترة $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ لكل مما يأتي:

_____ ظا ١٣٠ ° _____ جتا $(\frac{1}{3})$ _____ جتا $(-\frac{3}{4})$ _____ ظا (-36)

⑧ منحدرًا طوله ٢٤ مترًا، وارتفاعه عن سطح الأرض ٩ أمتار، اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد قياس زاوية ميل المنحدر مع الأرض الأفقية، ثم أوجد قياسها.

اختبار الوحدة

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه.

- ١) الزاوية ٥٨٥° تكافئ في الوضع القياسي الزاوية التي قياسها:
- ٤٥ ☐ ١٣٥ ☐ ٢٢٥ ☐ ٣١٥ ☐

- ٢) إذا كان $\theta > ٠$ ، فما $\theta < ٠$ فإن زاوية تقع θ في الربع:
- الأول ☐ الثاني ☐ الثالث ☐ الرابع ☐

- ٣) إذا كانت θ زاوية حادة وكان $\theta = (٢٠ + \theta)^\circ$ جتا ٢٠° فإن θ تساوي:
- ٢٠ ☐ ٢٠ ☐ ٤٠ ☐ ٥٠ ☐

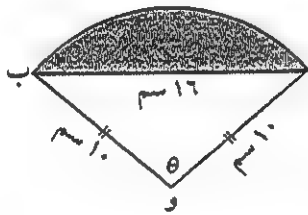
- ٤) الزاوية $(٨٥٠ -)$ تقع في الربع:
- الأول ☐ الثاني ☐ الثالث ☐ الرابع ☐

- ٥) قياس الزاوية بالدرجات التي تقابل قوساً طوله π في دائرة طول نصف قطرها ٩ سم تساوي:
- ٣٠ ☐ ٦٠ ☐ ١٢٠ ☐ ١٥٠ ☐

- ٦) أبسط صورة للمقدار: جتا $(\theta + ١٨٠) +$ جتا $(\theta + ٩٠)$ يساوي:
- ٢ ☐ ٢ جتا θ ☐ ٢ جتا θ ☐

- ٧) ظا $(٢٠ -)$ تساوي:
- $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ☐

أجب عن الأسئلة الآتية:



- ٨) أ ب قوس في دائرة مركزها O وطول نصف قطرها ١٠ سم، أ ب = ١٦ سم. أوجد θ بالقياس الدائري ثم أوجد طول القوس أ ب:

- ٩) إذا كان $٩٠^\circ < \theta < ١٨٠^\circ$ حيث $\theta = ٤$ جتا θ فأوجد قيمة المقدار جتا $(\theta - ١٨٠) +$ ظا $(\theta - ٣٢٠) +$ جتا $(\theta - ٢٧٠)$

- ١٠) أوجد في أبسط صورة قيمة المقدار: جتا ١٢٠° جتا $٣٣٠^\circ -$ جتا ٤٢٠° جتا $(٣٠ -)$.

- ١١) أوجد بالرديان θ إذا كان ٢ جتا $\theta + ١ = \sqrt{3}$ حيث θ قياس زاوية حادة.

- ١٢) إذا كان الضلع النهائي للزاوية في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ فأوجد قيمة كل من: θ ، θ ق.

- ١٣) أوجد الدوال المثلثية الأساسية للزاوية θ إذا كان الضلع النهائي مرسومًا في الوضع القياسي ويمر بالنقطة $(٨ - ٤٦)$

اختبار تراكمي

أولاً: أسئلة الاختيار من متعدد

١٠ أي من الزوايا الآتية يكون الجيب وجيب التمام لها سالبين:

٣٣٠°

٢٢٠°

١٤٠°

٤٠°

١١ قياس الزاوية المركزية التي تقابل قوساً طوله π^2 في دائرة طول نصف قطرها ٦ سم يساوي:

$\frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{6}$

١٢ إذا كان $\theta = \theta_2 = \theta_1$ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن $\theta - 90^\circ$ تساوي:

١

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{4}$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

١٣ إذا كان الضلع النهائي للزاوية θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ فأوجد قيمة كل من θ و θ_2 .

١٤ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد (إن أمكن ذلك) قيمة كل من:

$\theta_2 - (\frac{\pi}{3})$

$\frac{\pi}{3}$ ق

جا (-135°)

جتا 210°

١٥ إذا كان الضلع النهائي للزاوية $(\theta - 90^\circ)$ حيث θ زاوية حادة موجبة، يقطع دائرة طول نصف قطرها ٥ وحدات طول في النقطة (ϵ, κ) فأوجد:

قيمة κ

جتا $(\theta - 90^\circ)$

جا $(\theta - 90^\circ)$

ق $(\theta - 90^\circ)$

١٦ دلائل: يصعد كريم بدراجته منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية قياسها 100° في الوضع القياسي

اكتب دالة مثلثية تبين العلاقة بين أطول المنحدر.

أوجد قيمة الأقرب عددين عشريين.

مكتبة وسام

شويين - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات

01004423597.3943035

الإيداع

في الرياضيات

ثالثاً:

الهندسة

الوحدة الثالثة (التشابه)

(١) تشابه المضلعات

(٢) تشابه المثلثات

(٣) تابع تشابه المثلثات

(٤) العلاقة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين

(٥) تطبيقات التشابه في الدائرة

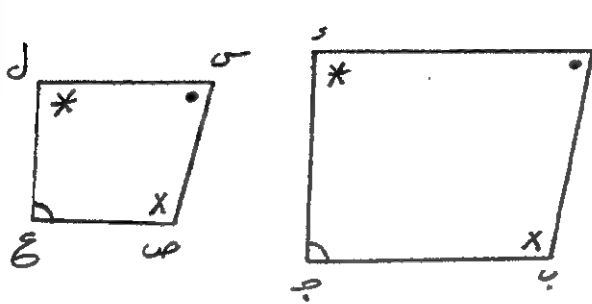
تمارين عامة علي الوحدة

اختبار الوحدة

(١) تشابه المضلعات

تعريف :-

يقال لمضلعين (مختلفين العدد من الأضلاع) أنهما متشابهان إذا تحققت الشرطتين الآتيتين معًا :-
(١) الزوايا المتناظرة متساوية من القياس (مطابقة) .



(٢) أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة .
* من الشكل المقابل :- إذا كان :-

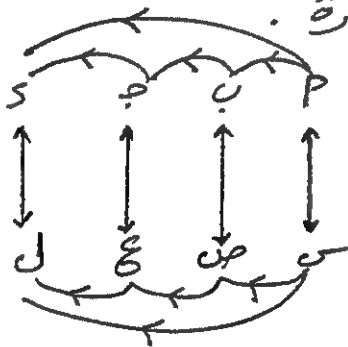
$$\textcircled{1} \quad \frac{PA}{SB} = \frac{PB}{SC} = \frac{PC}{SD} = \frac{PD}{SA} \quad \text{و} \quad \frac{PA}{SB} = \frac{PB}{SC} = \frac{PC}{SD} = \frac{PD}{SA}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{PA}{SB} = \frac{PB}{SC} = \frac{PC}{SD} = \frac{PD}{SA}$$

فإنه المضلع PABCD يشبه المضلع SBCDA "والعلامة له تشابه"

ملحوظات هامة :-

١) يجب كتابة المضلعين المتشابهين بنفس ترتيب رؤسهما المتناظرة .



فإذا كان المضلع PABCD يشبه المضلع SBCDA فإنه

$$\frac{PA}{SB} = \frac{PB}{SC} = \frac{PC}{SD} = \frac{PD}{SA} \quad \text{و} \quad \frac{PA}{SB} = \frac{PB}{SC} = \frac{PC}{SD} = \frac{PD}{SA}$$

$$\frac{PA}{SB} = \frac{PB}{SC} = \frac{PC}{SD} = \frac{PD}{SA} \quad \text{و} \quad \frac{PA}{SB} = \frac{PB}{SC} = \frac{PC}{SD} = \frac{PD}{SA}$$

• ويكون معامل تشابه المضلع PABCD للمضلع SBCDA هو k .

→ مثال :-

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k} \quad \text{و} \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{k}$$

٢) لكن تشابه مضلعين يجب توافر الشرطين معًا ولا يكفي توافر أحدهما دون الآخر .

مثلاً :-

• المربع والمستطيل مضلعان غير متشابهين (لماذا؟)

• المربع والمضلع مضلعان غير متشابهين (لماذا؟)

• ليست جميع المستطيلات متشابهة وكذلك المثلثات ومتوازيات الأضلاع

الابداع في الرياضيات

② المضاعف المائل لثالث متساوية .

⑤ أي مضاعف منقح من نفس العدد الذي مضاعف من مضاعفاته.

نظراً :- • جميع المنظمات المتساوية الأضلاع متشابهة

• جميع المربعات متشابهة

• جميع الأشكال الخماسية المنتظمة متشابهة وهكذا...

⑦ إذا كان المصنع m n المصنع n فإن $\frac{\text{حيط المصنع } m}{\text{حيط المصنع } n} = \text{عامل التشابه}$

أي أنه :- النسبة بين محيط مضلعين متشابهين = النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما

(٧) كَيْدُهُ لَهُ صَوْرَتَانِ تَشَابَهَا الْخُضْلَعُ وَالْخُضْلَعُ مِمَّا

* إذا كان له ١ فإما المصطلح ٢ هو تعبير للمصطلح ٣ .

* إذا كان α دالة في \mathcal{A} فإن α هو تصغير للمضلع α .

* إذا كان $e = 1$ فإن المصطلح $\frac{1}{n}$ يطابق المصطلح $\frac{1}{n}$.

مثال ① :- خذ الشكل المقابل :-

المضلع P بجوار المضلع ه ونج

(۷) اودھ معامل تشابہ المضلع ابھی المضلع ہونے

(۲) اوجہ قیم ۶ ص

(٣) إذا كان محيط المضلع $ABCD = 50$ سم. أوجد محيط المضلع $HDEF$.

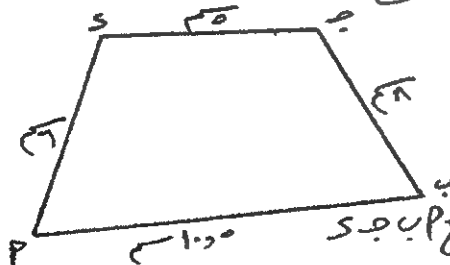
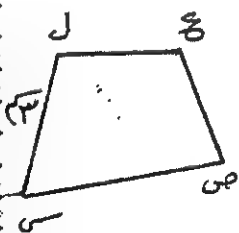
الحل :- :- المضلع P بجوار المضلع هوزح

فيلكون $\frac{P}{D} = \frac{B.B}{D} = \frac{S}{Z} = \frac{SP}{LH} = \text{معامل النشابة}$

$$\boxed{\frac{13}{2}} = \frac{15}{1} = \text{مقابل السابا} \Leftrightarrow \frac{15}{1} = \frac{10}{5} = \frac{20}{10} = \frac{5+15}{7} \Leftrightarrow$$

❶ اكل ما يُأْتِي :-

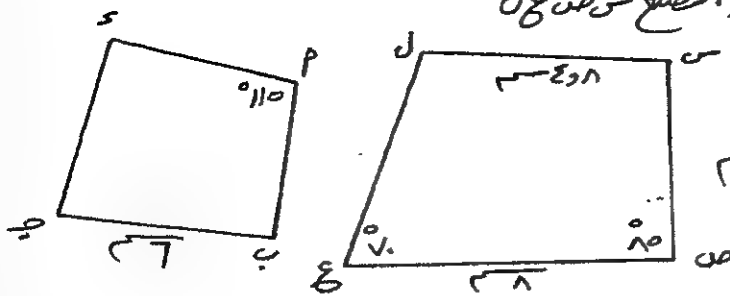
- ۲) من الشغل المقابل :- المضلع P بج 5 من المضلع سم على



- خفا کا کہ $p = ۵$ ، اسم ۶ ، ج $= ۸$ اسم
 ۶ ، ج $= ۵$ ، اسم ۶ ، ج $= ۳$ ، اسم ۶ ، ج $= ۳$ ، اسم
 اوجہ :- (۱) معامل کشابہ المضارع من عمل
 (۲) من عمل من عمل من عمل

- ۳] مستطیل بعرض ۱۰ سم ، ۶ سم اوجہ محیط و مساحتہ مستطیل آخر متشابه ہے
اذا كان p - معامل التشابه = ۳ و b - معامل التشابه = ۵ و

٤ خذ الشكل المقابل :- المضلع $PBJD$ من المضلع SD من عمل



(أ) أوجد محيط $PBJD$ (ب) أوجد محيط SD

(ج) إذا كان محيط المضلع $PBJD = 19.0$ سم

أوجد محيط المضلع SD من عمل .

٥ المضلع $PBJD$ من المضلع SD من عمل فإذا كان $PB = 3$ سم ، $BJ = 6$ سم ، $JD = 8$ سم

$SD = 1$ سم ، $SD = 1 + 3 = 4$ سم . أوجد قيمة m الزاوية

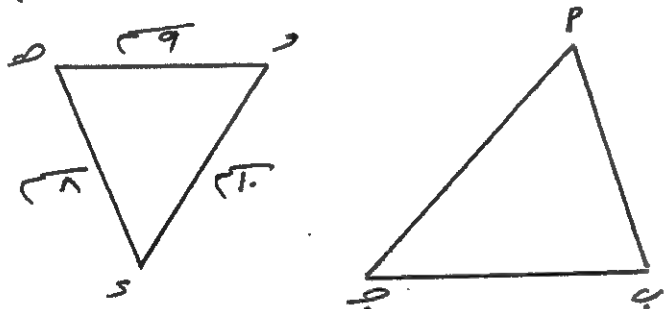
٦ مستطيلين متشابهين بعد الأول 8 سم ، 12 سم ، ومحيط الثاني 100 سم

طول المستطيل الثاني ومساحته .

٧ علبة على شكل مستطيل طوله 12 سم وعرضه 8 سم هل هذا المستطيل يقرب من

المستطيل الذهبي ؟ ولماذا ؟

٨ علبة على شكل مستطيل ذهب طوله 12 سم أوجد عرضه العلبة الأقرب سم .



٩ خذ الشكل المقابل :-

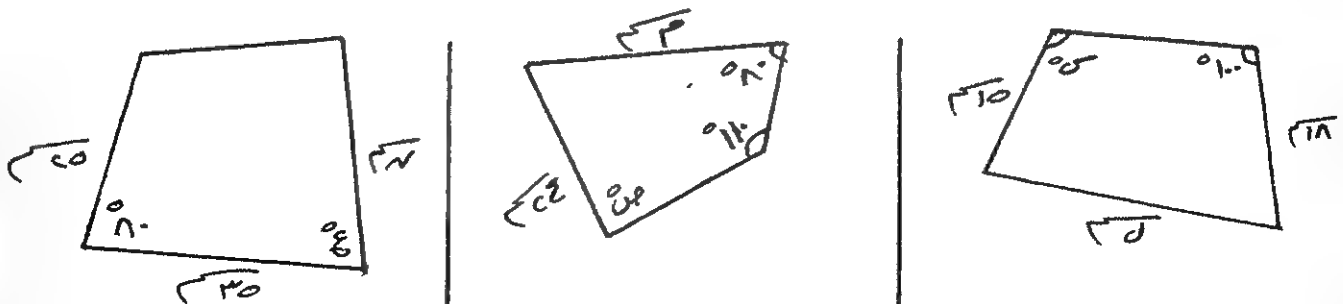
PBD من SD هو

$SD = 8$ سم ، $SD = 9$ سم ، $SD = 10$ سم

إذا كان محيط $PBD = 11$ سم

أوجد أطوال أضلاع PBD

١٠ المضلعان الثلاثي القابلية متشابهة . أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس .

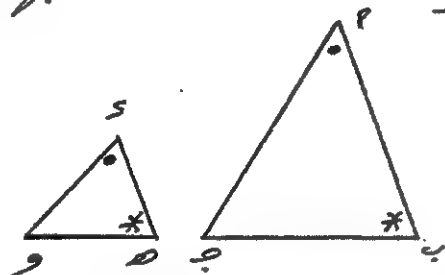


٢٠) تشابه المثلثات

تعريف :- من الدرس السابق علمنا أنه لكي يتشابه مثلعاين يجب أن يتحقق شرطا تشابه
معا ولا يكفي تحقق أحدهما دون الآخر

أما في المثلثات فقد علمنا من الصف الثاني الإعدادي أنه لكي يتشابه مثلعاين
تحقق شرط واحد فقط من الشرطين السابقين ذكرهما.

مسئمة :- إذا طابقت زاويتاه في مثلث فطابقتا في مثلث آخر كانه المثلثان متشابهين



* من الشكل المقابل :- $\angle A \equiv \angle P$ و $\angle B \equiv \angle Q$ $\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$

فإنه $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ و ينتج من التشابه أنه :-

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

مكتبة وسام
شريف شارع حنفى مبارك - خلف الثانوية بنات
01004423597.3943035

* حالات خاصة *

① المثلثان المتساويان الأضلاع متشابهين .

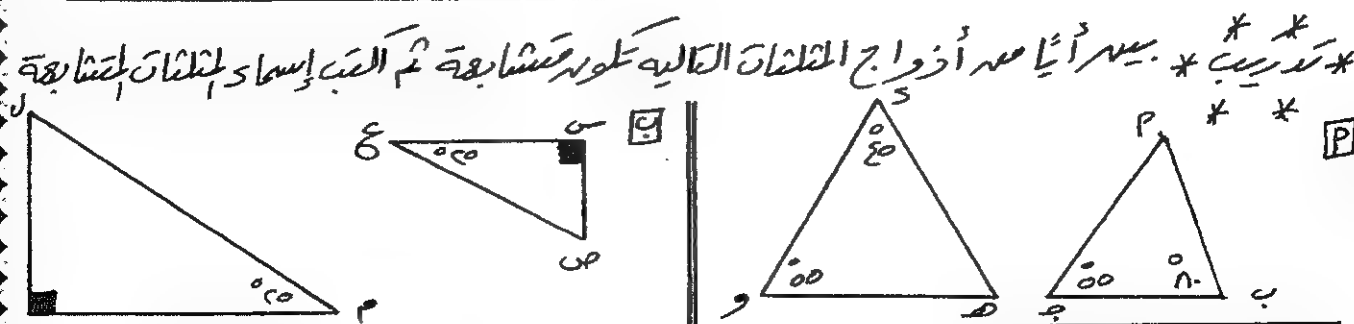
② يتشابه المثلثان القائم الزاوية إذا سادت قياس إحدى الزاويتين الحادتين

في أحدهما قياس إحدى الزاويتين الحادتين في الآخر .

③ يتشابه المثلثان المتساويان الساقين :-

* إذا سادى قياس إحدى زاويتي القاعدة في أحدهما قياس إحدى زاويتي القاعدة في الآخر

* إذا سادى قياس زاوية الرأس في أحدهما قياس زاوية الرأس في الآخر .

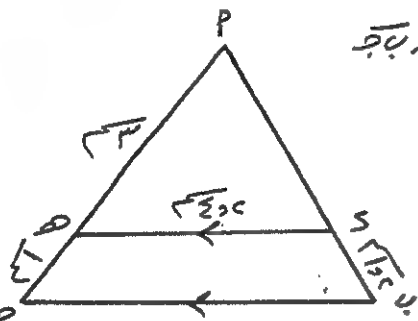
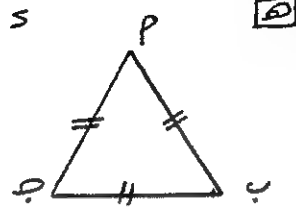
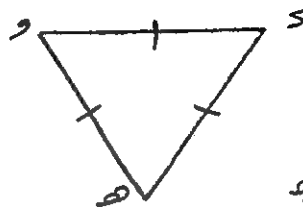
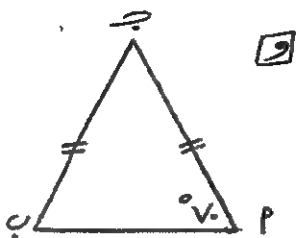
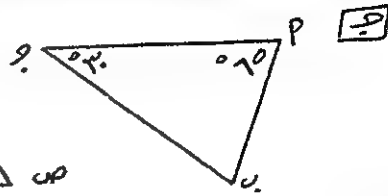


أ / جميل غالى السيد

(١٠٦)

الفصل الدراسي الأول

الابداع في الرياضيات



(۱) اُجبت أن ΔSPΔ و ΔPΔو

(c) اوسط طول کل صند \bar{x} ، ہج

الحل :- :: 3 // 4

$$\therefore \rho(\hat{M}) = \rho(\hat{N}), \quad \rho(\hat{M}) = \rho(\hat{N}) \text{ "بالتناظر"}$$

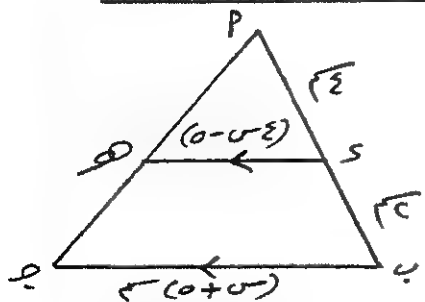
من $\Delta \Delta$ $P > P < P < P$ میروا
 $\left. \begin{array}{l} P > P > P \\ P > P > P \\ P > P > P \end{array} \right\}$

∴ $\Delta SP \sim \Delta P \sim \Delta P$ وينتج من التشابه ∴

$$\frac{y}{z} = \frac{\sum c}{\sum p} = \frac{SP}{LC + SP} \leftarrow \frac{\partial P}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{SP}{LP}$$

$$\text{مثلاً } 0,7 = \frac{\sum X \sum c}{\sum y} = 0,7 \leftarrow$$

$$\sqrt{3,7} = 5P \Leftarrow 3,7 + 5P \xrightarrow{r} 5P \Leftarrow (1, c + 5P) \xrightarrow{r} 5P \Leftarrow$$



* * * * *
* * * * *

اُجَیۡنَا نَدِیۡمُ دِلۡلٰہَ

نم اوهبقيه من العريه



العلم :- ب. ب. ۱۱۵

خس ۵۵ P ب ج ۵۶ ه و ض ط

∴ PΔ و SPΔ و شقیق :-

* * *
* تدریب *
* * *
فصل النحل المقابل :-

* * انجیل ۵۵ و ۵۴ و ۵۳ و ۵۲ و ۵۱

ہم اوصد طول سہ



اثبت انه $SP \cap SX = \{s\}$

البصير :- العلم :- نرسع بآه و آف

عمر ۵۵ SP ۶ بڑھ گیا

∴ $p > q$ (د ب) حقیقتاً به مشترکانه می شود

$\therefore \text{م (د } p \text{ ج) = م (د ه و ب) بالتقابل بالرأس}$

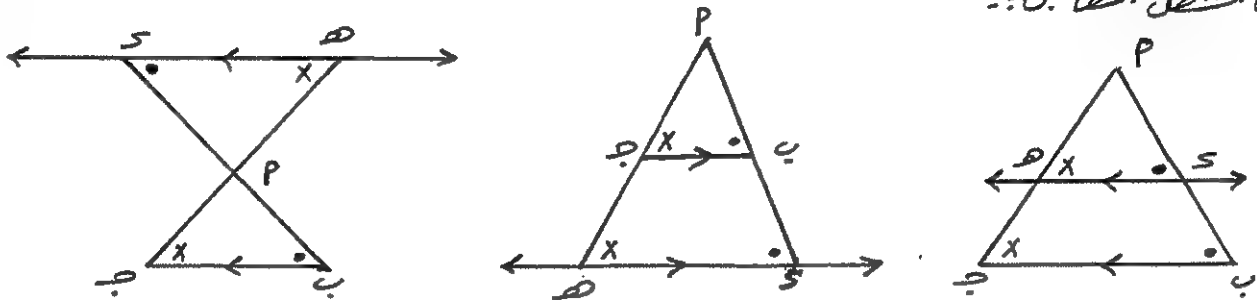
$\therefore \Delta SP \sim \Delta NPS$ و $\frac{PS}{SN} = \frac{SP}{PS} \therefore 6 \therefore PS = SN$ مثل

$$\# \quad SP \times PS = (S) \Leftrightarrow \frac{SP}{S} = \frac{PS}{S} \quad \#$$

من نتائج هامة

⊗ نتيجة (١) :- إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الخارجين لهما فإنه المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلي.

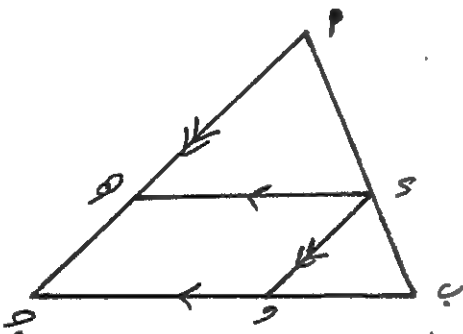
من الشكل المقابل :-



إذا كان $SC \parallel AB$ ويقطع PA في S و PB في C فإن $SC \parallel AB$ على الترتيب

فإن $\triangle PSC \sim \triangle PAB$

مثال (٢) :- من الشكل المقابل :-



$PA \parallel SC$ ، $PC \parallel AB$ ، رسم $SC \parallel AB$

ويقطع PA في S و PB في C ، $SC \parallel AB$ ويقطع AB في O .

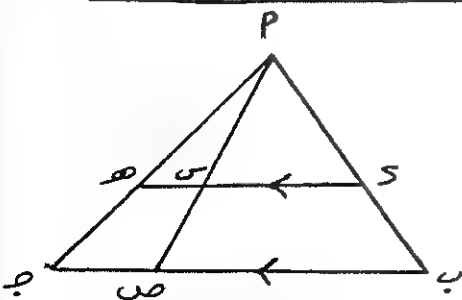
برهنة أن $\triangle PSC \sim \triangle PAB$

الطلب :- $\therefore SC \parallel AB$ $\therefore \triangle PSC \sim \triangle PAB$ \leftarrow (١)

$\therefore SC \parallel AB$ $\therefore \triangle PSC \sim \triangle PAB$ \leftarrow (٢)

من (١) ، (٢) يتبع أن $\triangle PSC \sim \triangle PAB$ $\#$

مثال (٣) من الشكل المقابل :-



(١) اذكر ثلاثة أزواج من المثلثات المتشابهة

$$(٢) \text{ أثبت أن } \frac{PS}{SA} = \frac{PC}{CB} = \frac{SC}{AB}$$

الطلب :- $\Delta P \sim \Delta P \sim \Delta P$ ج $\Delta P \sim \Delta P \sim \Delta P$ ج $\Delta P \sim \Delta P \sim \Delta P$ ج #

$$\Delta P \sim \Delta P \sim \Delta P \text{ ج} \iff \frac{SP}{BP} = \frac{PS}{BP} = \frac{PS}{BP} \leftarrow \text{ج}$$

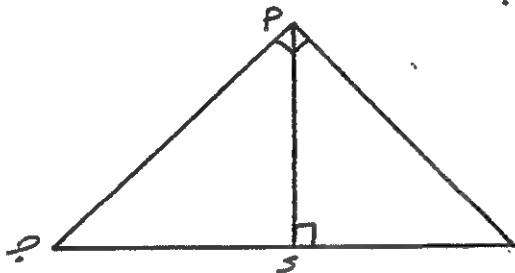
$$\Delta P \sim \Delta P \sim \Delta P \text{ ج} \iff \frac{SP}{BP} = \frac{PS}{BP} = \frac{PS}{BP} \leftarrow \text{ج}$$

$$\Delta P \sim \Delta P \sim \Delta P \text{ ج} \iff \frac{SP}{BP} = \frac{PS}{BP} = \frac{PS}{BP} \leftarrow \text{ج}$$

مع ج ج ج ج

$$\# \frac{SP}{BP} = \frac{PS}{BP} = \frac{PS}{BP}$$

* نتيجة (٢) :- إذا رسم من رأس القائمة من المثلث القائم الزاوية عمود على وتر المقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل واحد منهما متشابه للمثلث الأصلي.



من الشكل المقابل :-

من $\Delta P \sim \Delta P \sim \Delta P$ ج $\Delta P \sim \Delta P \sim \Delta P$ ج

$$\Delta P \sim \Delta P \sim \Delta P \text{ ج} \iff \frac{SP}{BP} = \frac{PS}{BP} = \frac{PS}{BP} \leftarrow \text{ج}$$

من $\Delta P \sim \Delta P \sim \Delta P$ ج $\Delta P \sim \Delta P \sim \Delta P$ ج

$$\Delta P \sim \Delta P \sim \Delta P \text{ ج} \iff \frac{SP}{BP} = \frac{PS}{BP} = \frac{PS}{BP} \leftarrow \text{ج}$$

$$\Delta P \sim \Delta P \sim \Delta P \text{ ج} \iff \frac{SP}{BP} = \frac{PS}{BP} = \frac{PS}{BP} \leftarrow \text{ج}$$

مع (I) ج (II) :- $\Delta P \sim \Delta P \sim \Delta P$ ج $\Delta P \sim \Delta P \sim \Delta P$ ج

من الشكل السابق والعلامة ج كذا استنتاج نظريات أقليدس :-

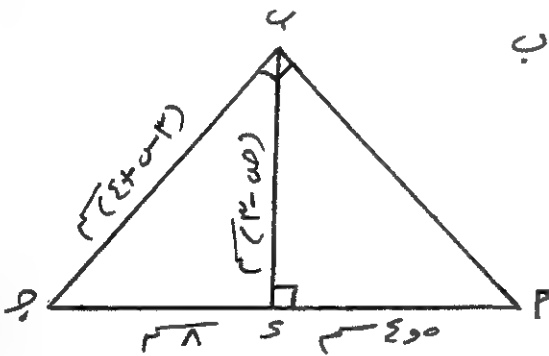
$$\Delta P \sim \Delta P \sim \Delta P \text{ ج} \iff \frac{SP}{BP} = \frac{PS}{BP} = \frac{PS}{BP} \leftarrow \text{ج}$$

$$\Delta P \sim \Delta P \sim \Delta P \text{ ج} \iff \frac{SP}{BP} = \frac{PS}{BP} = \frac{PS}{BP} \leftarrow \text{ج}$$

⑤ منه تشابه $\triangle P \sim \triangle P \sim \triangle P$ $\Rightarrow \frac{P}{P} = \frac{P}{P}$ أي أنه P وسط متناسب بين P و P $\Rightarrow \boxed{P = P}$

③ منه تشابه $\triangle P \sim \triangle P \sim \triangle P$ $\Rightarrow \frac{P}{P} = \frac{P}{P}$ أي أنه P وسط متناسب بين P و P $\Rightarrow \boxed{P = P}$

② منه تشابه $\triangle P \sim \triangle P \sim \triangle P$ $\Rightarrow \frac{P}{P} = \frac{P}{P}$ $\Rightarrow \boxed{P = P}$ ومنه $\boxed{P = P}$



مثال ⑤: من الشكل المقابل: P و Q نقطتان ثابتتان

بني $PQ \perp$ PS و $PS = 10$ و $QS = 20$ و $RS = 20$

أوجد قيمة PS

الحل: $\because \triangle P \sim \triangle P \sim \triangle P$ الزاوية مشتركة

$\therefore PQ \perp PS$

$\therefore \triangle P \sim \triangle P \sim \triangle P$ ونستخرج نظريات أقليدس

(٧) $\therefore (PQ)^2 = PS \times SR \Rightarrow 10^2 = 10 \times 20 = 200$

$\therefore 10^2 = 200$

أو $10^2 = 200$

أو $10^2 = 200$

مفروضه $\boxed{\frac{12}{3} = 4} \Rightarrow 12 = 12$

$\boxed{c = 3} \Rightarrow 7 = 3$

(٧) $\therefore (PQ)^2 = PS \times SR \Rightarrow 36 = 18 \times 20 = 360$

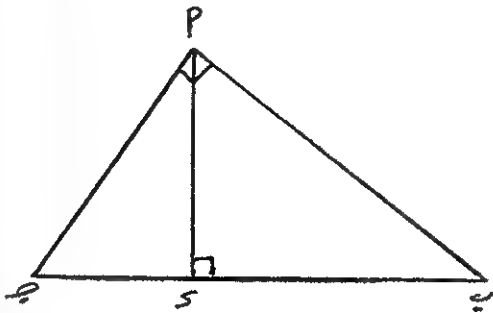
$\therefore 36 = 360$

أو $36 = 360$

أو $36 = 360$

مفروضه $\boxed{3 = 3}$

$\boxed{9 = 9}$



* * * * * خ الكحل المقابل :-

* * * * * P ب ج قائم الزاوية خ P ، P س ⊥ ب ج ليقتعه خ س :-

$$\frac{SP}{SB} = \frac{PS}{PB} \quad (1)$$

$$\frac{SP}{SB} = \frac{PS}{PB} \quad (2)$$

$$\frac{SP}{PB} = \frac{PS}{SB} \quad (3)$$

$$\frac{SP}{PB} = \frac{PS}{SB} \quad (4)$$

$$x \dots = (PS) \quad (5)$$

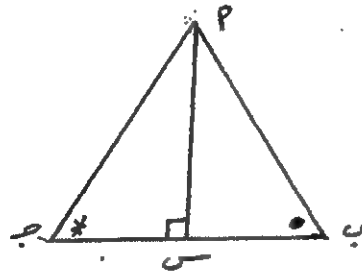
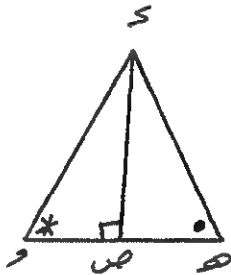
$$\frac{PB}{SB} = \frac{PS}{SB} \quad (6)$$

$$\frac{PB \times \dots}{SB} = SP \quad (7)$$

$$\dots \times \dots = (PB) \quad (8)$$

مثال ٦ :- P ب ج ، S هو مثلث قائم الزاوية خ S ، رسم P س ⊥ ب ج ليقتعه خ س

ورسم S س ⊥ ب ج ليقتعه خ س . أثبت أنه ب س × ص و = ج س × ص ه



الحل :- P ب ج ، S هو مثلث قائم الزاوية خ S

∴ ∠(ب) = ∠(ج) ، ∠(س) = ∠(س) ، ∠(و) = ∠(و)

خ S ب ج ، S هو مثلث قائم الزاوية خ S

∴ ∠(ب) = ∠(ج) ، ∠(س) = ∠(س) ، ∠(و) = ∠(و)

∴ P ب س ∼ S ب ج و ينتج أنه $\frac{PS}{SB} = \frac{PS}{SB} = \frac{PB}{SB}$ ← (1)

خ S ب ج ، S هو مثلث قائم الزاوية خ S

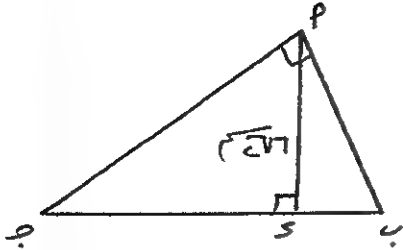
∴ ∠(ب) = ∠(ج) ، ∠(س) = ∠(س) ، ∠(و) = ∠(و)

∴ P س ج ∼ S ب ج و ينتج أنه $\frac{PS}{SB} = \frac{PS}{SB} = \frac{SB}{SB}$ ← (2)

من (1) ، (2) ∴ $\frac{PS}{SB} = \frac{PS}{SB} = \frac{SB}{SB}$ ← (3) ∴ ب س × ص و = ج س × ص ه

مثال ٧ :- P ب ج مثلث قائم الزاوية خ P ، رسم P س ⊥ ب ج ليقتعه خ س

إذا كان $\frac{PS}{SB} = \frac{1}{2}$ ، SP = ٢ ، سم أو جد طول كل من SB ، P ب ، P ج



الطلب :- $\therefore \frac{1}{2} = \frac{PS}{AB} \Rightarrow PS = 2\sqrt{3}$

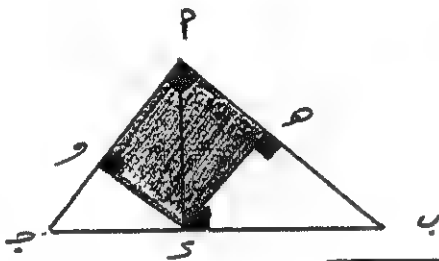
\therefore $PS \perp BC$ فأنتم ضرب P $\therefore PS \perp BC$

$\therefore (PS) = (AB \times PS) = (2\sqrt{3}) \Rightarrow PS = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow PS = 2\sqrt{3} \Rightarrow PS = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$\therefore PS = 2\sqrt{3} \Rightarrow PS = 2\sqrt{3}$

$\therefore (PS) = (AB \times PS) = (2\sqrt{3}) \Rightarrow PS = 2\sqrt{3}$



مثال ١ :- في الشكل المقابل :- $PS \perp BC$ فأنتم ضرب P

$PS \perp BC$ $PS \perp BC$ $PS \perp BC$

أثبت أنه (١) $PS \perp BC$ $PS \perp BC$

(٢) مساحة المثلث $PS \perp BC$ $PS \perp BC$

الطلب :- \therefore $PS \perp BC$ $PS \perp BC$

\therefore $PS \perp BC$ $PS \perp BC$

\therefore $PS \perp BC$ $PS \perp BC$

\therefore $PS \perp BC$ $PS \perp BC$

\therefore $PS \perp BC$ $PS \perp BC$

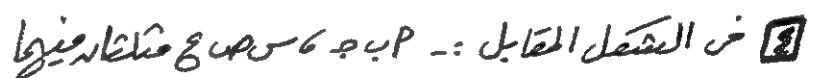
\therefore مساحة المثلث $PS \perp BC$ $PS \perp BC$

\therefore مساحة المثلث $PS \perp BC$ $PS \perp BC$

❖ اذكر الحالات التي يكون فيها المشاع حساسا بلحظه وفي حالة التشابه اذكر سبب التشابه



نعم اوصد طول جدّه

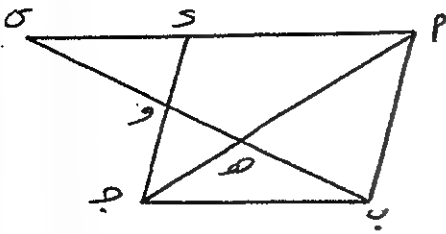


$$\sqrt{1} = 1, \sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3, \sqrt{16} = 4$$

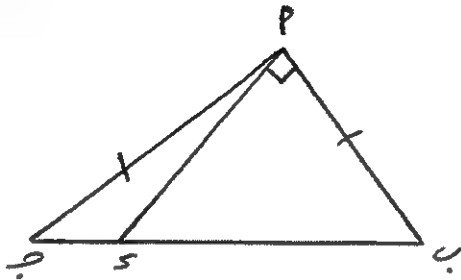
عَبْدُ = ۲۶۳. أَتَجَبَّأُ Δ بِبِ Δ ن Δ ص ص ع نِمْ أَوْجِدْ طُولِ قَبْ

□ فرض $P \Delta Q$ و $P < Q$: $P \supset Q$ و $P \hat{=} Q$ = $P \supset Q$ و $P \hat{=} Q$ = $P \supset Q$

احتمال $P \times P = (P)$



٦ من الشكل المقابل :- P ب ج د متوازي أضلاع
و د ح ج ب ، رسم بكو قطع P ج ضعه وقطع P د ضري
اثبت أنه (١) $PH \sim HD$ (٢) $PH \sim HD$
(٣) $(H \sim B) = H \sim X$



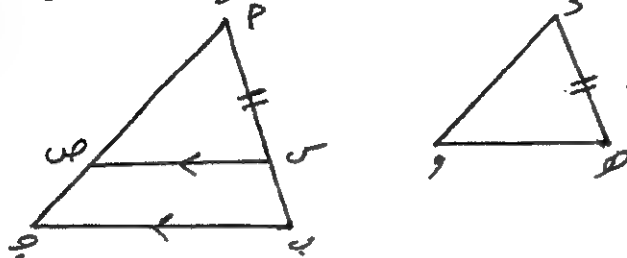
٧ من الشكل المقابل :-
 P ب ج مثلث منفرج الزاوية ض P $P = B$
رسم P ك $P \perp$ و يقطع ب ج ض S
اثبت أنه $C(BP) = C(SB) = X$

٨ أراد سليمان أن يعرف ارتفاع سارية العلم الذي في مدرسته فوضع مرآة على بعد
٥ أمتار من قاعدة السارية ثم تحرك إلى الخلف مسافة ١ متر وكانت عيناه
على ارتفاع ٥ دأتر فوق سطح الأرض فإذا كانت قدماه والمرآة والسارية
على استقامة واحدة أوجد ارتفاع السارية
"عنا بانه زاوية السقوط = زاوية الانعكاس"

٣) "تابع / تشابه المثلثات"

نظرية (١) :-

إذا تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة من مثلثين فإنهما يشابهان.



المعطيات :- $\Delta PQR \sim \Delta STU$ و $ST \parallel QR$

$$\frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TU} = \frac{PR}{SU}$$

المطلوب :- $\Delta PQR \sim \Delta STU$

الحل :- نحسب ΔPQR ، $PQ \parallel ST$ ، $QR \parallel TU$ ، $PR \parallel SU$ ونقطع PQ من S

البرهان :- $\therefore \Delta PQR \sim \Delta STU$ $\therefore \Delta PQR \sim \Delta STU$

$$\text{و يكون } \frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TU} = \frac{PR}{SU} \therefore \Delta PQR \sim \Delta STU$$

$$\therefore \frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TU} = \frac{PR}{SU} \text{ (١) } \therefore \frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TU} = \frac{PR}{SU} \text{ معطى (٢)}$$

$$\text{من (١) و (٢) } \Rightarrow \Delta PQR \sim \Delta STU \text{ ، أم } \Delta PQR \sim \Delta STU$$

"الأضلاع المتناظرة متطابقة"

"المثلثان المتطابقان يكونان متشابهين"

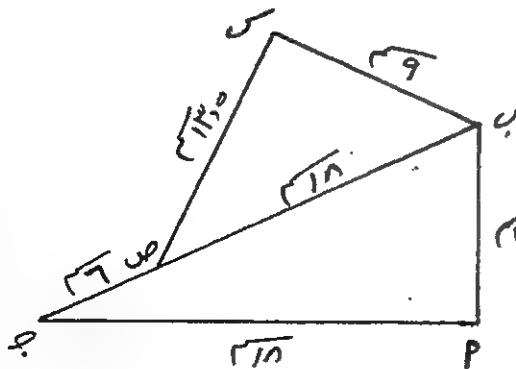
"برهاناً"

$$\therefore \Delta PQR \sim \Delta STU$$

$$\therefore \Delta PQR \sim \Delta STU$$

$$\therefore \Delta PQR \sim \Delta STU$$

$$\therefore \Delta PQR \sim \Delta STU \#$$



مثال (١) :- في الشكل المقابل :-

ب، من ج على واستقامة واحدة

أثبت أنه : (١) $\Delta PQR \sim \Delta STU$ (٢) $\Delta PQR \sim \Delta STU$

(٣) $\Delta PQR \sim \Delta STU$

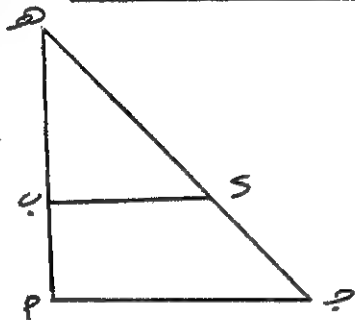
الحل :- في ΔPQR ، $ST \parallel PQ$ ، $ST \parallel PQ$ ، $ST \parallel PQ$

$$\frac{2}{3} = \frac{17}{1350} = \frac{P}{S} \quad \frac{2}{3} = \frac{7+17}{18} = \frac{P}{S} \quad \frac{2}{3} = \frac{14}{9} = \frac{P}{S}$$

(الاضلاع المتناظرة متناسبة)

$$\frac{P}{S} = \frac{P}{S} = \frac{P}{S}$$

∴ Δ P ب ج ∼ Δ س ب س # ويتبع من التشابه أن الزوايا المتناظرة متساوية
 ق (P ب ج) = ق (س ب س) أي أن ب ج ينصف د ب س #



مثال ٥ :- في الشكل المقابل :- P ب ج ∼ Δ س ب س = ق ج

حيث $\frac{PB}{SB} = \frac{PS}{SB}$ و $\frac{PB}{SB} = \frac{PS}{SB}$
 أثبت أن $\vec{BS} \parallel \vec{PS}$

الحل :- ∴ $\frac{PB}{SB} = \frac{PS}{SB} \Rightarrow \frac{PB}{SB} = \frac{PS}{SB}$

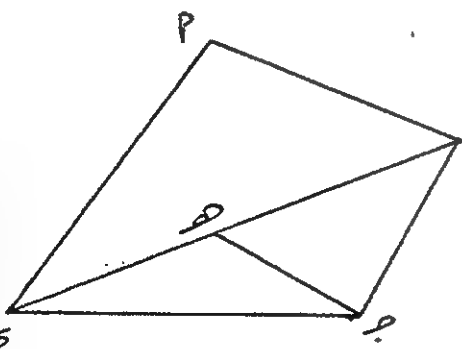
"من خواص التناسب"

∴ $\frac{PB}{SB} = \frac{PS}{SB} \Rightarrow \frac{PB}{SB} = \frac{PS}{SB}$

من ١ و ٢ يتبع أن : $\frac{PB}{SB} = \frac{PS}{SB} = \frac{PS}{SB}$

أي أن :- Δ P ب ج ∼ Δ س ب س ويتبع أن

ق (P ب ج) = ق (س ب س) "وخاص وضع تناظر"
 ∴ $\vec{BS} \parallel \vec{PS}$ #



مثال ٦ :- في الشكل المقابل :- P ب ج ∼ Δ س ب س رباعي

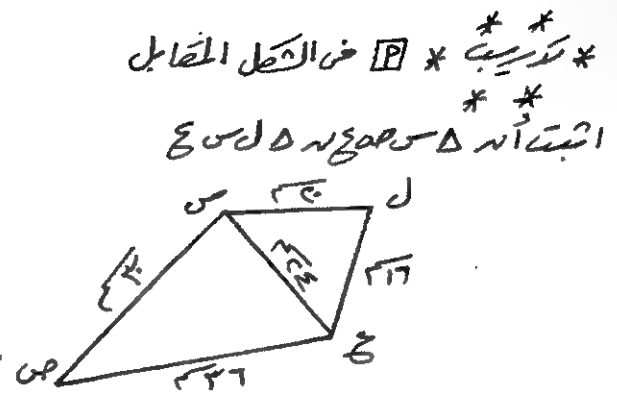
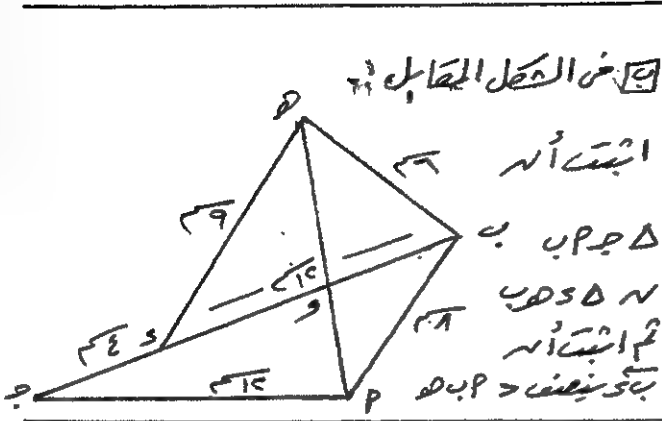
حيث $\frac{PB}{SB} = \frac{PS}{PS}$ و $\frac{PB}{SB} = \frac{PS}{PS}$
 أثبت أن :- (١) $\vec{PS} \parallel \vec{BS}$ و (٢) $\vec{PB} \parallel \vec{BS}$

الحل :- ∴ $\frac{PB}{SB} = \frac{PS}{PS} \Rightarrow \frac{PB}{SB} = \frac{PS}{PS}$

∴ $\frac{PB}{SB} = \frac{PS}{PS} \Rightarrow \frac{PB}{SB} = \frac{PS}{PS}$

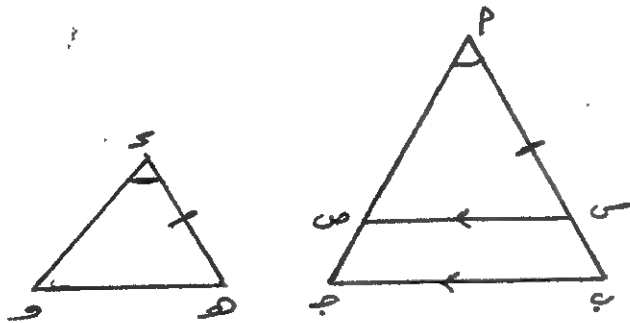
من ١ و ٢ ∴ $\frac{PB}{SB} = \frac{PS}{PS} = \frac{PS}{PS}$

وَنُضَعُ أَنْهَ $م(أب) = م(مب)$ وهما من وضع متساويين
 # $سب // أب$ \therefore $سب // أب$ وهما من وضع متساويين



نظرية (٢) :-

إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر وتسايت أطوال الأضلاع
 التي تحتوي صائرها الزاويتان كله المثلثان متشابهين.



البيانات :- $س = م$ ، $س م = م ج$ ، $س م = م ج$

المطلوب :- $Δ م ب ج \sim Δ س هـ و$

الحل :- خذ من $س م$ و $م ج$ حيث $س م = م ج$

ورسم من $س م$ و $م ج$ وقطع $م ج$ من $س م$

البرهان :- $\therefore س م // أب$ $\therefore Δ م ب ج \sim Δ س م ج$ (١)

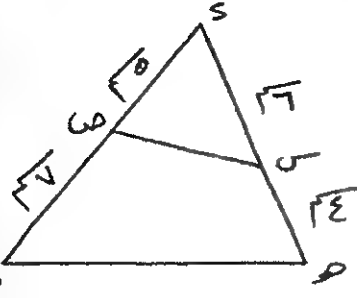
وبكونه $\frac{س م}{س ج} = \frac{م ب}{ج هـ}$ ، $\therefore \frac{س م}{س ج} = \frac{م ب}{ج هـ}$ (مطلوب) ، $\therefore س م = م ج$

$\therefore \frac{س م}{س ج} = \frac{م ب}{ج هـ}$ وبكونه $س م = م ج$

$\therefore Δ س م ج \sim Δ س هـ و$ "ضلعان وزاوية محصورة"

$\therefore Δ س م ج \sim Δ س هـ و$ (٢)

منه (١) ، (٢) يتبع أنه $Δ م ب ج \sim Δ س هـ و$ #



مثال ③ :: من الشكل المقابل :: ده وحملت فيه

$$دو = ٢٠م ، دى = ١٠م ، ده = ٨م$$

$$س هـ = ٤م ، هـ و = ٧م ، أوجد ::$$

(١) طول س هـ ، (٢) أثبت أنه لخط س هـ ومن راعى واثرى .

الحل :: $دو = ٢٠م = ١٢ - ٧ = ٥م$ ، $دى = ١٠ - ٤ = ٦م$

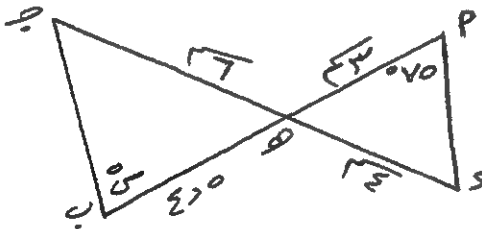
من $\Delta د هـ و$ ، $د هـ و$ من هنا :: $\frac{دو}{د هـ} = \frac{٢٠}{٨} = \frac{٥}{٢}$ ، $\frac{١}{٢} = \frac{٥}{٢} = \frac{دو}{د هـ}$ ، $\frac{١}{٢} = \frac{٦}{١٢} = \frac{دو}{د هـ}$

:: $\frac{دو}{د هـ} = \frac{دو}{د هـ}$ ، :: مشتركة :: $\Delta د هـ و \sim \Delta د هـ و$

:: $\frac{دو}{د هـ} = \frac{س هـ}{د هـ} = \frac{١}{٢} \Rightarrow \frac{س هـ}{٨} = \frac{١}{٢} \Rightarrow س هـ = ٤م$

ونستنتج أيضًا من التشابه أنه $\angle د هـ و = \angle د هـ و$ (زوايا

مقابلتان) :: $\Delta د هـ و \sim \Delta د هـ و$:: الشكل من راعى واثرى



مثال ④ :: من الشكل المقابل ::

أوجد قيمة الرمز المستخدم من إيمان مفسرًا وإجابته

الحل ::

لايجاد الرمز من يجب اثبات أنه $PA \parallel QB$ وذلك من تشابه المثلثين ΔPAB و ΔQAC

من ΔPAB و ΔQAC ، $PA \parallel QB$ من هنا :: $\angle PAB = \angle QAC$ (زوايا

مقابلتان) :: $\frac{PA}{QA} = \frac{PB}{QC} = \frac{AB}{AC}$ ، $\frac{١٠}{١٠} = \frac{١٢}{١٢} = \frac{١٤}{١٤}$

:: $\Delta PAB \sim \Delta QAC$ ، $PA \parallel QB$ ونستنتج من التشابه أنه ::

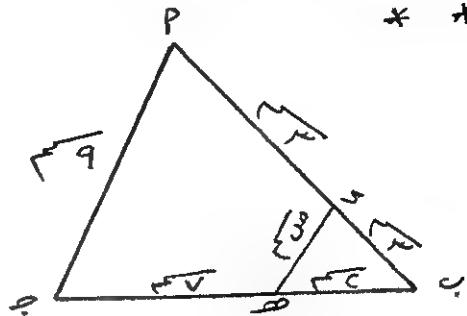
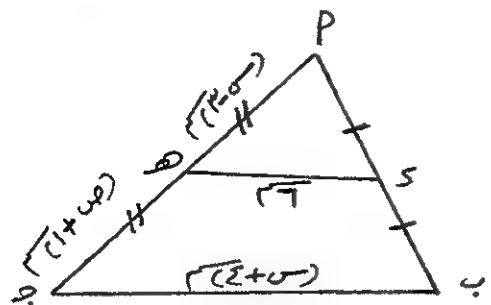
$\angle PAB = \angle QAC$ (زوايا مقابلتان) :: $\angle PAB = \angle QAC$

مكتبة

شرف - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات

01004423597.3943035

* تدريب * خذ كل من الأشكال الآتية أو جد قيمة الرمز المستعمل في العتاس مفسراً إذا جازك

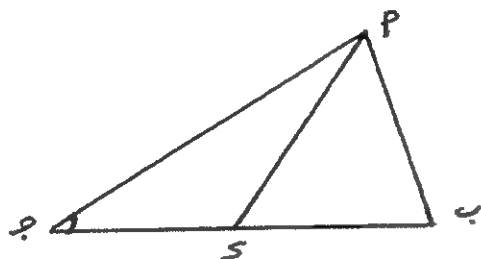


مثال ٦: $P \in AB$ مثلث PAB حيث $PA = PB$ و $PA = PB$

أثبت أن $\triangle PAB \sim \triangle PAB$

الحل: خذ $\triangle PAB$ و $\triangle PAB$ متطابقين

مشاركة (١)



$$\therefore PA = PB \iff PA = PB \iff PA = PB \iff PA = PB \iff PA = PB$$

من (١) و (٢) ينتج أن $\triangle PAB \sim \triangle PAB$ #

مثال ٧: $P \in AB$ و $Q \in AC$ مثلثان متشابهان $\triangle PAB \sim \triangle QAC$ و $PA = QA$ و $PB = QC$

$$\triangle PAB \sim \triangle QAC \iff PA = QA \iff PB = QC$$

أثبت أن (١) $\triangle PAB \sim \triangle QAC$ و (٢) $PA = QA$ و (٣) $PB = QC$

الحل: $\therefore \triangle PAB \sim \triangle QAC$ و $PA = QA$ و $PB = QC$

$$\therefore PA = QA \iff PB = QC \iff PA = QA \iff PB = QC \iff PA = QA$$

من (١) و (٢) و (٣) ينتج أن $\triangle PAB \sim \triangle QAC$ و $PA = QA$ و $PB = QC$

$$\therefore PA = QA \iff PB = QC \iff PA = QA \iff PB = QC \iff PA = QA$$

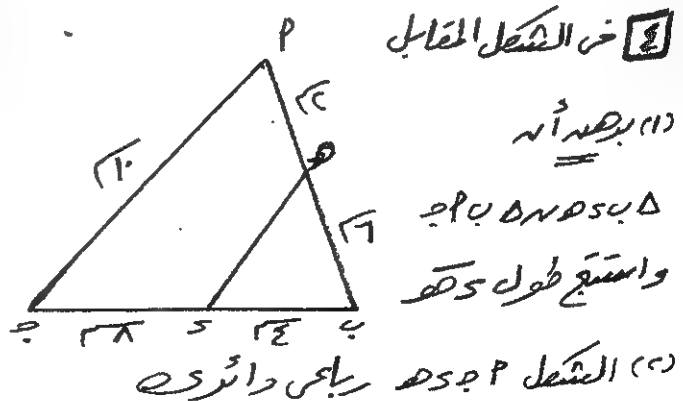
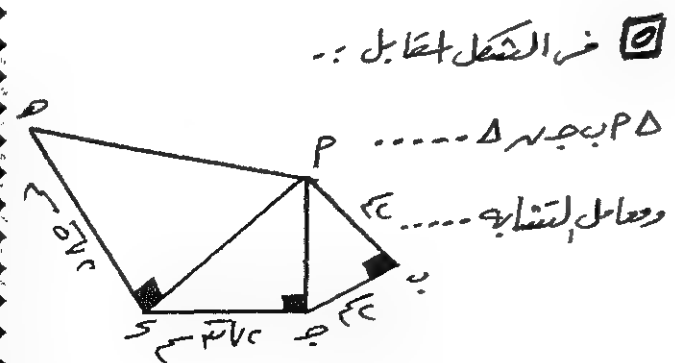
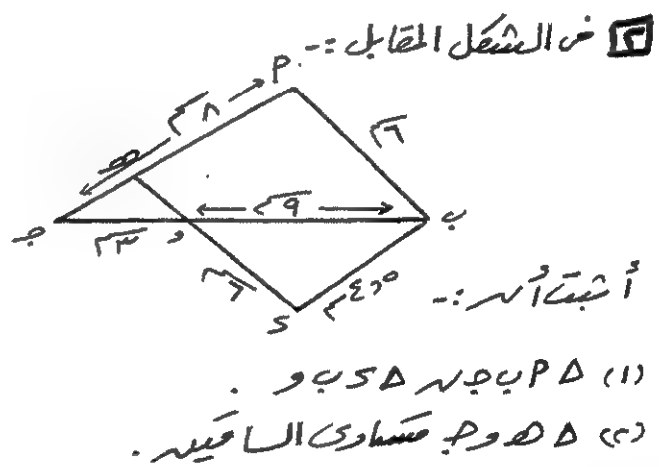
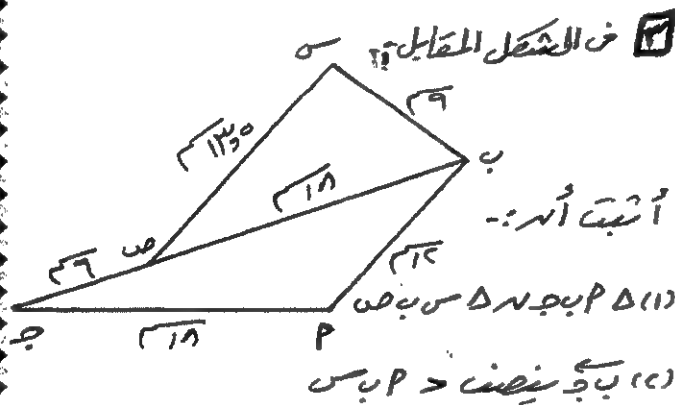
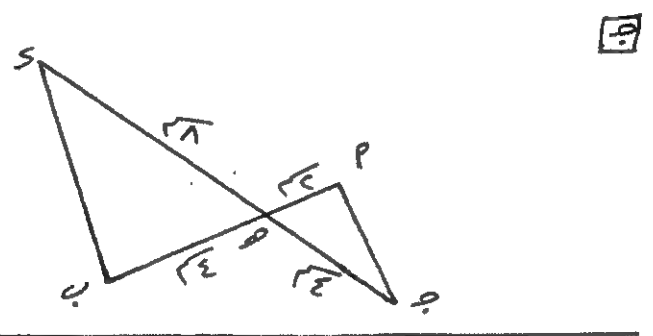
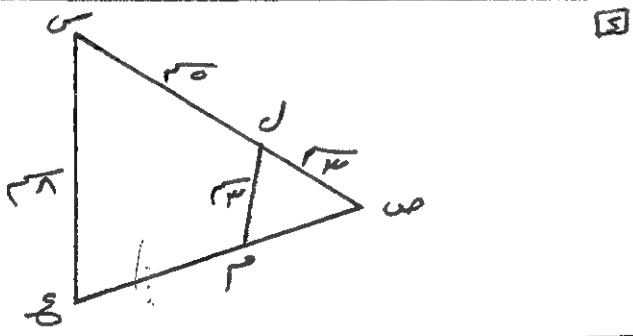
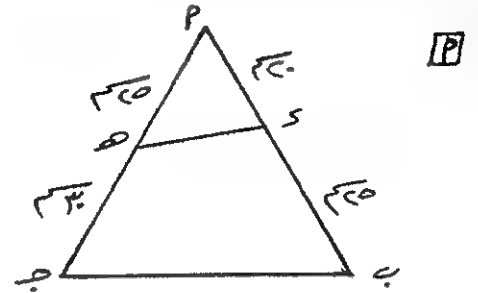
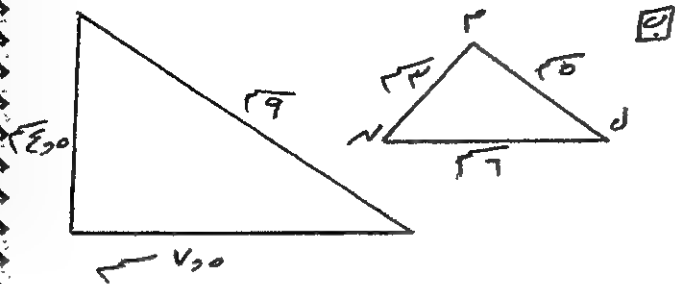
خ $\triangle PAB \sim \triangle QAC$ و $PA = QA$ و $PB = QC$ (برهاناً من (١) و (٢) و (٣))

$$\therefore \triangle PAB \sim \triangle QAC \iff PA = QA \iff PB = QC \iff PA = QA \iff PB = QC \iff PA = QA$$

$$\therefore \triangle PAB \sim \triangle QAC \iff PA = QA \iff PB = QC \iff PA = QA \iff PB = QC \iff PA = QA$$

تمادي على "تابع/تشابه الثلاثيات"

١ اذكر أي الحالات يكون فيها المثلثان متشابهين وفي حالة التشابه اذكر سبب التشابه



٦) P بج S شكل راي مرسوم داخل دائرة تقاطع قطره PQ ، بج S فره

فإذا كان $\frac{PS}{SP} = \frac{PQ}{SQ}$ أثبت أنه (١) $\Delta PDS \sim \Delta SQS$ ، (٢) بج ينصف PQ ،

٧) في الشكل المقابل :- P بج S مرسوع

هـ منصف بج ، م منصف مرسوع ،

بج $\perp PQ$ ، Q ل S هـ أثبت أنه

(١) $\Delta PDS \sim \Delta SQS$ ، (٢) $\frac{PS}{SQ} = \frac{SD}{QS}$

٨) P بج ، م مرسوع مثلث متساوي الساقين حيث P بج ، م مرسوع مرسوع

هـ ل منصف بج ، م مرسوع على الترتيب . رسم PQ بج ، م مرسوع $\perp PQ$

اثبت أنه $\Delta PDS \sim \Delta SQS$.

٩) P بج مثلث ، $S \in PQ$ حيث $(SP) = SQ$ ، بج $PS = SQ$ ، بج $PS = SQ$

اثبت أنه :- (١) $\Delta PDS \sim \Delta SQS$

(٢) $\angle P = \angle Q$

(٣) $PS \perp PQ$

درس "العلاقة بين مساحة سطح مثلثين متشابهين"

أولاً: النسبة بين مساحة سطح مثلثين متشابهين :-

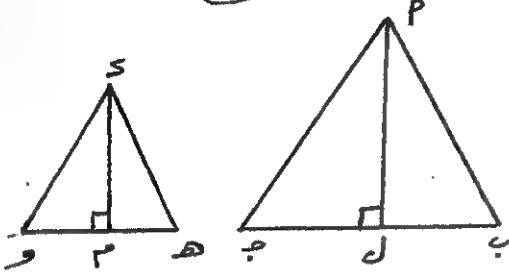
نظرية (٣) :-

النسبة بين مساحة سطح مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة

بين طولى أى ضلعين متناظرين فيها .

من الشكل المقابل :- إذا كان $\triangle PAB \sim \triangle SDH$ و

$$\text{فإن } \left(\frac{PA}{SD}\right)^2 = \left(\frac{PB}{DH}\right)^2 = \left(\frac{AB}{SH}\right)^2 = \frac{(\triangle PAB)}{(\triangle SDH)}$$



ملاحظة هامة

① النسبة بين مساحة سطح مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين ارتفاعي متناظرين فيها

$$\text{من الشكل السابق :- } \left(\frac{PL}{SM}\right)^2 = \frac{(\triangle PAB)}{(\triangle SDH)}$$

② النسبة بين محيطي مثلثين (متشابهين) متساوي النسبة بين طولى ضلعين

$$\text{متناظرين فيها . من الشكل السابق :- } \frac{\text{محيط } \triangle PAB}{\text{محيط } \triangle SDH} = \frac{PA}{SD} = \frac{PB}{DH} = \frac{AB}{SH}$$

③ النسبة بين مساحة سطح مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولى

أى متوسطين متناظرين فيها .

من الشكل المقابل :- $\triangle PAB \sim \triangle SDH$ و

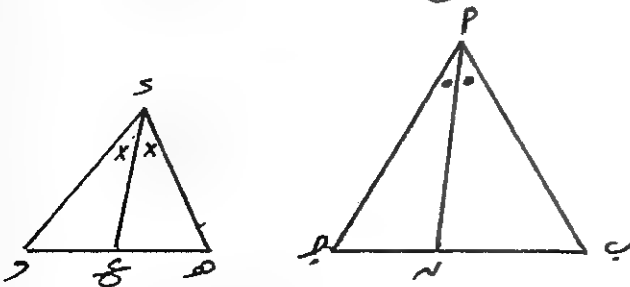
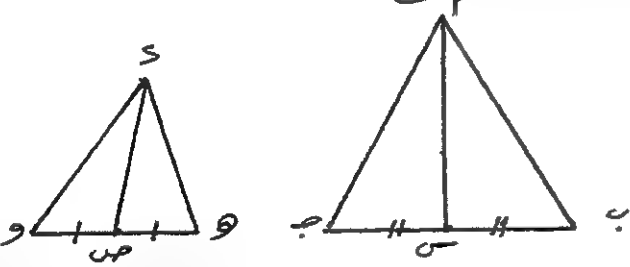
$$\therefore \left(\frac{PM}{SH}\right)^2 = \frac{(\triangle PAB)}{(\triangle SDH)}$$

④ النسبة بين مساحة سطح مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولى

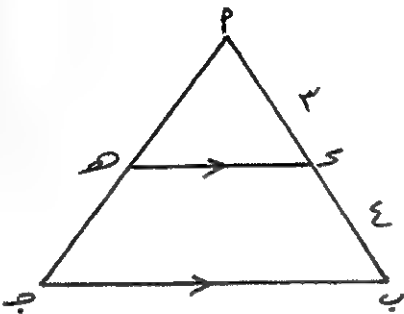
أى منصفين لزاويتين متناظرتين فيها

من الشكل المقابل :- $\triangle PAB \sim \triangle SDH$ و

$$\therefore \left(\frac{NP}{DG}\right)^2 = \frac{(\triangle PAB)}{(\triangle SDH)}$$



القاعدة تساوي النسبة بين ارتفاعيها .
 ⑤ النسبة بين مساحتي مثلثين لهما نفس الارتفاع تساوي النسبة بين طولي قاعدتيهما .



مثال ① :- من الشكل المقابل :- P ب ج مثلث C د ب ج

حيث $\frac{PC}{CB} = \frac{3}{4}$ C د ب ج و يقطع P ج ض هـ

إذا كانت مساحة P د هـ = ٧٨٤ سم^٢ أوجد :-

(١) مساحة P د هـ (٢) مساحة شبه المثلث C د ب ج هـ

الحل :- :: C د ب ج :: P د هـ P د هـ ~ C د ب ج

$$\frac{9}{81} = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{(P د هـ) م}{٧٨٤} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{(P د هـ) م}{(C د ب ج) م} \therefore$$

$$\# ١٤٤ = \frac{9 \times ٧٨٤}{81} = (P د هـ) م \Leftrightarrow$$

$$\therefore م (شبه المثلث C د ب ج هـ) = م (P د هـ) - م (C د ب ج) = (P د هـ) م$$

$$\therefore م (شبه المثلث C د ب ج هـ) = ١٤٤ - ٧٨٤ = ٦٤٠ سم^٢ \#$$

* * * تدريب * P ب ج مثلث مساحته ٦٠ سم^٢ ، رسم س هـ || ب ج و يقطع P ب ض هـ * * *
 و يقطع P ج ض هـ فإذا كان P س : س ب = ٣ : ٢ أوجد مساحته الشكل س ب ج هـ

مثال ⑤ :- إذا كانت النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين هي ٩ : ٤ فإذا كان

محيط المثلث الأكبر ٩٠ سم أوجد محيط المثلث الأصغر

الحل :- لفرصه A ~ P د هـ ~ C د ب ج هـ

$$\therefore \frac{9}{4} = \left(\frac{90}{س}\right)^2 = \frac{(P د هـ) م}{(C د ب ج هـ) م} \Leftrightarrow \frac{9}{4} = \frac{90}{س}$$

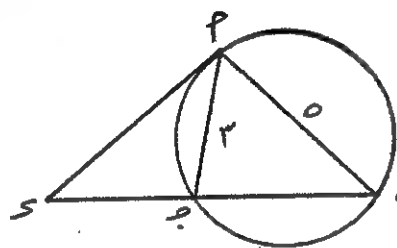
$$\therefore \frac{9}{4} = \frac{محيط P د هـ}{محيط C د ب ج هـ} \Leftrightarrow \frac{9}{4} = \frac{90}{س}$$

$$\therefore محيط P د هـ = \frac{9 \times 90}{4} = ٢٠٢.٥ سم \#$$

الابداع في الرياضيات

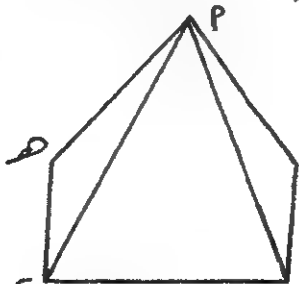
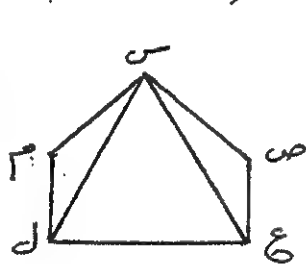
مثال ٣ :- P بجہ مثلث مرسوم داخل دائرہ بحيث $\frac{AP}{P} = \frac{BP}{P}$ ، رسم P و P محاسباً
للدائرة عند P قطع بـ P و P اوجد $m(PD)$: $m(PD)$

۳ > ۵ شرکت


$$(SPD)_{PQ} + (PSPD)_{PQ} = (PSPD)_{PQ} \leftarrow$$

$$\# \frac{9}{17} = \frac{(pspd)r}{(pspd)r} \leftarrow (pspd)_{p9} = (pspd)_{p17} \therefore$$

"حَقِيقَةٌ": - المضلعان المتشابهان على ذلك أنه ينقسمان إلى نفس العدد من المثلثات المتشابهة يشابه كل منظر نظيره.



في الشكل المقابل :- إذا كان
المضلع P جـ هو المضلع سـ مع كل م

$\rho_{\text{LSD}} \Delta n_{\text{DSP}}^S \Delta f_{\text{LSD}} \Delta n_{\text{DSP}}^P \Delta f_{\text{LSD}} \Delta n_{\text{DSP}}^P \Delta f_{\text{LSD}} \Delta n_{\text{DSP}}^P$

• كـ "علمية": - عدد المثلثات التي عليه أن ينقسم إلى n مضلع $= (n-2)$ مثلثاً حيث n عدد الأضلاع
مثلاً: - المضلع الذي عدد أضلاعه 8 أضلاع ينقسم إلى 6 مثلثات .

بسیار خوبی فعلیه و متناظر به فعلیه.



$$\begin{aligned} \frac{م (المضلع P ج د هـ)}{م (المضلع س ص هـ ج م)} &= \frac{پ (P)}{س (س)} = \frac{ج (ج)}{ص (ص)} \\ \frac{هـ (هـ)}{م (م)} &= \frac{س (س)}{ل (ل)} = \frac{ج (ج)}{ع (ع)} = \end{aligned}$$

فإذا كان مجموع مصاصيها ٥٠ سم، أوجد مساحة كل منها.

الحل :-

بفرصة مسابقة الأول = ٢٥ سم مسابقة الثاني = ٩ سم

∴ مجموع مساویوں کا مجموعہ 0 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25 = 5 × 5 = 5² = 5

∴ مساحة المضلع الأول = $0 \times 1 = 0$ ، مساحة المضلع الثاني = $0 \times 9 = 0$ \therefore $\#$

* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *

مثال ۵) P بجای S سے L مضاعفانہ متشابہ ہے۔ فیثا $(\hat{P}) = \hat{S} = 0$ ، S سے $P = \frac{3}{2}$ بجای

ج ۵ = ۱۶ م : اُحسب (۱) و (۲) ، (۳) طول عجل

(۳) م (المضلع أب ج د) : م (المضلع س ص ع ل)

الخط :- \therefore المصالح N و P و S و U و G $\therefore \hat{\Sigma}_0 = (\hat{\sigma})^N = (\hat{P})^N$ #

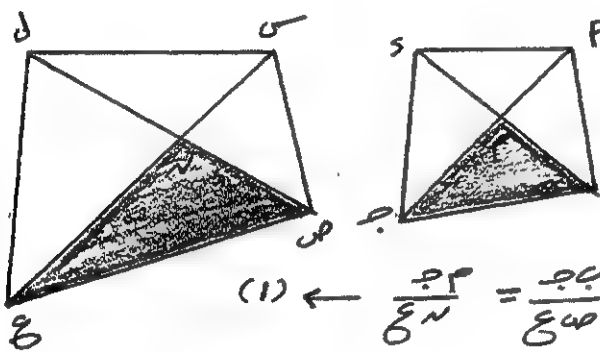
∴ س ص = $\frac{3}{4} \text{ ب } \text{ب} \text{ب} \Leftarrow \frac{\text{س}}{3} = \frac{\text{ب}}{\text{س}} \Leftarrow$ "عده خواص القياس"

عده تشابه المضلعين نجد أن ∴ $\frac{\text{س}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{س}}{3} = \frac{\text{ب}}{\text{س}} \Leftarrow \frac{17}{8} = \frac{3}{4}$

∴ $\text{س} \text{ ب} = \frac{17 \times 3}{2} = 25.5$

∴ م (المضلع ب ب ج د) : م (المضلع س ص ج ل) = (ب ب) : (س ص) = 9 : 16 #

مثال ⑤ ∴ ب ب ج د ، س ص ج ل مضلعان متشابهان ∴ تقاطع قطري الأول من م وتقاطع قطري الثاني من ن اشبه أن م (المضلع ب ب ج د) : م (المضلع س ص ج ل) = (ب ب) : (س ص) ∴



الحل ∴ ∴ المضلع ب ب ج د ∼ المضلع س ص ج ل

∴ $\Delta \text{ب ب ج} \sim \Delta \text{س ص ج}$

∴ $\Delta \text{ب ج د} \sim \Delta \text{س ج ل}$ (لما في ؟)

∴ $\Delta \text{ب ج د} \sim \Delta \text{س ج ل}$ ونستنتج أن ∴ $\frac{\text{ب ج}}{\text{س ج}} = \frac{\text{ج د}}{\text{ج ل}} \Leftarrow (1)$

∴ المضلع ب ب ج د ∼ المضلع س ص ج ل

∴ $\frac{\text{م (المضلع ب ب ج د)}}{\text{م (المضلع س ص ج ل)}} = \left(\frac{\text{ب ب ج}}{\text{س ص ج}}\right) \Leftarrow (2)$

عده (1) و (2) ∴ م (المضلع ب ب ج د) : م (المضلع س ص ج ل) = (ب ب) : (س ص) ∴

مثال ⑦ ∴ ب ب ج د مثلث قائم الزاوية من ب فإذا كان ب ب ج ج د ، ب ب ج د ، ب ب ج د

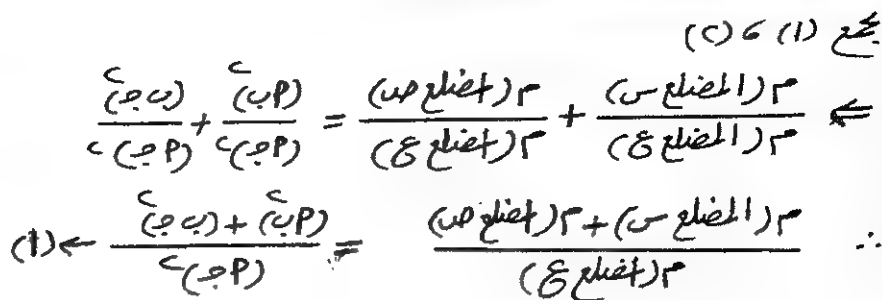
مناظرة لثلاث مضلعات متشابهة منشأة على أضلاع المثلث ب ب ج

وهي على الترتيب : المضلع س ، المضلع ص ، المضلع ع .

اشبه أن م (المضلع س) + م (المضلع ص) = مساحة (المضلع ع)

الحل ∴ ∴ المضلع س ∼ المضلع ص ∼ المضلع ع ∴ $\frac{\text{م (المضلع س)}}{\text{م (المضلع ع)}} = \frac{\text{م (ب ب ج)}}{\text{م (ج ج د)}} \Leftarrow (1)$

∴ المضلع ص ∼ المضلع ع ∴ $\frac{\text{م (المضلع ص)}}{\text{م (المضلع ع)}} = \frac{\text{م (ب ب ج)}}{\text{م (ج ج د)}} \Leftarrow (2)$



$$1 = \frac{C(P)}{C(P)} = \frac{r(\text{المضاعف}) + r(\text{المضاعف})}{r(\text{المضاعف})} \leftarrow (C) \text{ و } (I) \text{ مع}$$

$$(P \supset) \mathcal{P} = (\mathcal{P} \supset) \mathcal{P}$$
$$P(S \geq p) = P(S \leq p)$$

مقدار $\frac{dp}{dt}$ در $t = 5$ را بیابید.

(1) اُتَبَتَانِ دِس دِنِ سَوِي

(c) $\frac{(550)2}{(500)2}$ اوجہ

الخطم :-

∴ 555 و 655 فیہا

SPD \sim PSD \therefore

$$\# \frac{C_O}{q} = \left(\frac{C_O}{r} \right) = \left(\frac{C_{PS}}{P_{SD}} \right) = \frac{(2.25 \Delta) r}{(5.75 \Delta) r} \therefore$$

تأديبه على العلاقة بين مساحة مضلعين متشابهين

□ أكل ما يأتي :-

(١) إذا كانت النسبة بين طول ضلعين متناظرين من مضلعين متشابهين ٧ : ١١ فإن النسبة بين مساحتهما ، وبين محيطيهما

(٢) إذا كان $PD \parallel AB$ وكان $AP = 3$ سم فإن $\frac{PD^2}{AB^2} = \frac{(5-3)^2}{5^2} = \frac{4}{25}$

(٣) مضلعان متشابهان النسبة بين مساحتهما ٩ : ٤ فإن النسبة بين محيطيهما

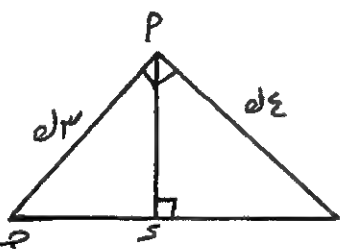
(٤) إذا كان $PD \parallel AB$ و $AD = 5$ سم ، $AP = 9$ سم ($PD \parallel AB$) وكان $DE = 4$ سم فإن $AP = \dots\dots\dots$ سم .

(٥) مربعان النسبة بين طول قطريهما ٢ : ٥ فإذا كانت مساحة الأصغر ٤ سم^٢ فإن مساحة الأكبر

□ إذا كان طول ضلعين متناظرين من مضلعين متشابهين ١٦ سم ، ١٦ سم وكانت مساحة المضلع الأصغر = ١٣٥ سم^٢ أوجد مساحة المضلع الأكبر .

□ P ب ج مثلث ، D على AB حيث $PD \parallel BC$ ، E على AC حيث $DE \parallel BC$ ، وإذا كانت $M(PSD) = 6$ أوجد مساحة شبه المثلث PDE .

□ ادرس كلامه الاشكال الآتية ، حيث له ثابت تناسب ، ثم أكل :-



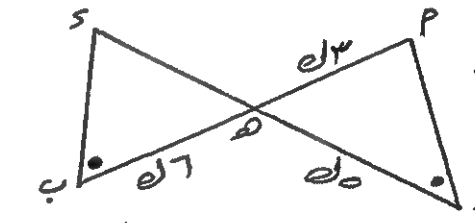
□

$M(PDB) = 9$

$PS \perp AB$

$M(PSD) = 18$ سم^٢

فإن $M(PDB) = \dots\dots\dots$ سم^٢



□

$M(PDE) = 90$ سم^٢

فإن $M(PDB) = \dots\dots\dots$ سم^٢

□ P ب ج مثلث قائم الزاوية عند B ، سمحت المثلثات المتساوية الاضلاع PBS ، PDC . أثبت أنه $M(PDB) = M(PDS) + M(PDC) = M(PDE)$

٦) P ب ج مثلث فيه $\frac{BP}{PQ} = \frac{2}{3}$ ، رسمت الدائرة المارة ب Q ومسه عند نقطة B رسم

المماس لهذه الدائرة تقطع PQ في A . اثبت أنه $\frac{AP}{AQ} = \frac{BP}{PQ}$.

٧) P ب ج د متوازي أضلاع ، $BP \perp PD$ ، $BP \perp PC$ حيث $BP \perp PC = BP$ ،

، $BP \perp PD$ ، $BP \perp PC$ حيث $BP \perp PC = BP$ ، رسم متوازي الأضلاع BP على BP ،
اثبت أنه $\frac{AP}{AQ} = \frac{BP}{PQ}$.

٨) P ب ج د ، $BP \perp PD$ ، $BP \perp PC$ ، فإذا كانت M منتصف BP ،

، M منتصف BP ، اثبت أنه M (المضلع BP ج د) : M (المضلع BP ج د) = M (ج د) : M (ج د) .

٩) P ب ج مثلث قائم الزاوية ضرب ، $BP \perp PD$ ، $BP \perp PC$ ، رسم على BP ،

، $BP \perp PD$ ، $BP \perp PC$ ، $BP \perp PC$ ، خارج المثلث BP ،

(١) اثبت أنه : المضلع BP ج د ، $BP \perp PD$ ، $BP \perp PC$ ،

(٢) إذا كان $BP = PD$ ، $BP = PD$ ، أوجد النسبة بين مساحة سطح المضلعين

١٠) P ب ج مثلث فيه $BP \perp PD$ ، $BP \perp PC$ ، أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعا

متشابهة مرسومة خارج المثلث ، وهي المضلعات BP ، BP ، BP على الترتيب

فإذا كانت مساحة المضلع BP = BP ، ومساحة المضلع BP = BP ،

ومساحة المضلع BP = BP . اثبت أنه المثلث BP ج د قائم الزاوية .

١١) P ب ج د مربع قمت BP ، $BP \perp PD$ ، $BP \perp PC$ ، $BP \perp PC$ ، $BP \perp PC$ ، $BP \perp PC$ ،

بنسبة ١ : ٣ اثبت أنه .

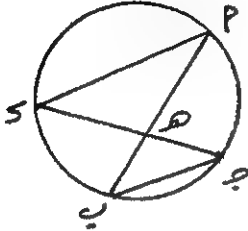
(١) الشكل BP ج د مربع .

(٢) $\frac{BP}{PQ} = \frac{BP}{PQ}$.

د) "تطبيقات التشابه من الدائرة"

تمرين مشهور :-

إذا تقاطع السطحان الخارجيان للوترين AB و CD للدائرة من نقطة H



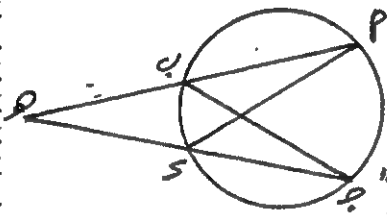
فإنه $HA \times HB = HC \times HD$

المعطيات :- AB و CD وتران متقاطعان في H

المطلوب :- اثبات أنه $HA \times HB = HC \times HD$

الحل :- نرسم AC و BD

البرهان :- ض $\triangle HPA$ و $\triangle HDB$ فيها



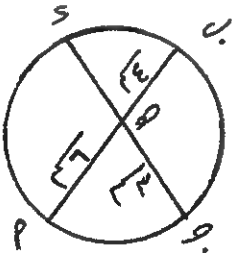
$\angle HPA = \angle HDB$ (م (د ه ب) محيطيات مشتركتان في ب) $\angle HPA = \angle HDB$ (م (د ه ب) محيطيات مشتركتان في ب)

$\therefore \triangle HPA \sim \triangle HDB$ وبتبع أنه $\frac{HP}{HD} = \frac{HA}{HB} = \frac{AP}{DB}$

\therefore من النسبة الأولى والثانية يتبع $HA \times HB = HC \times HD$ #

مكتبة واس
شرفين - شارع حسي مبارك - خلف الثانوية ب
01004423597 - 3943035

مثال ① :- من الشكل المقابل :-

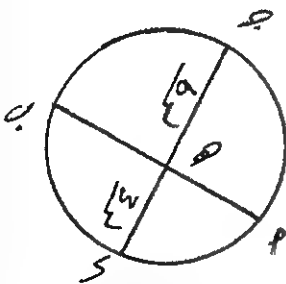


$HA \times HB = HC \times HD = 3 \times 7 = 4 \times 6 = 21$ أو $HA \times HB = 21$

الكل :- $\therefore \triangle HPA \sim \triangle HDB$

$\therefore HA \times HB = HC \times HD \Rightarrow 3 \times 7 = 4 \times 6 \Rightarrow 21 = 24$ (م (د ه ب) محيطيات مشتركتان في ب) #

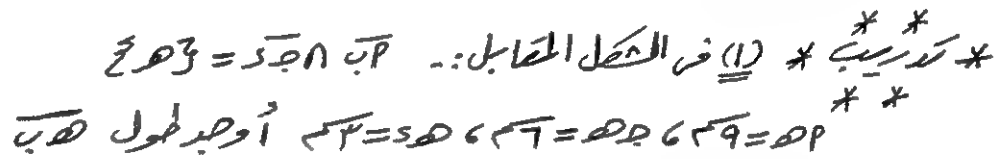
مثال ② :- من الشكل المقابل :- $HA \times HB = HC \times HD$



إذا كان $\frac{HA}{HB} = \frac{HC}{HD}$ و $HA \times HB = HC \times HD$ و $HA \times HB = 45$

أو $HA \times HB = 45$

الابداع في الرياضيات

$$S \cap X \cap P = C \cap X \cap P \therefore E \cap S = \overline{S \cap X \cap P} \therefore$$
$$\# \quad \nabla r = \partial r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla \varepsilon = \partial \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore$$


الحل :- ∴ P نقطة خارج الدائرة ، $\vec{PA} \perp \vec{PB}$ ، $\vec{PA} \perp \vec{PB} = \vec{PC}$

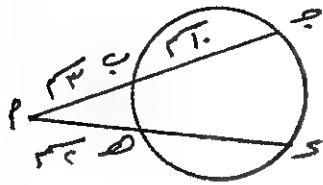
$$\sqrt{3} = \frac{37}{15} = OP \leftarrow OP \perp C = 37$$



الكل :- $\therefore \vec{P} \cap \vec{Q} = \vec{R} \iff \text{يفرض أن } \sigma = \psi$

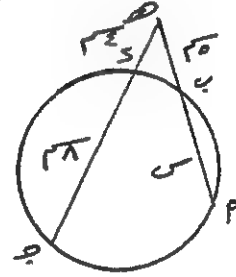
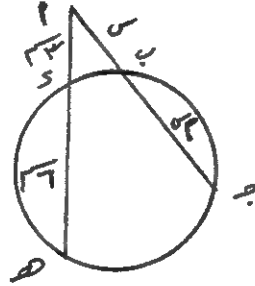
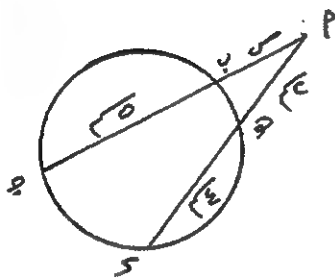
$$\cdot = (8-5)(9+5) \Leftarrow \cdot = 37 - 50 + 5 \Leftarrow 50 + 5 = 37$$

∴ س = ٩ (مفوضه) ، س = ٤ ∴ طول ب هـ = ٣٦



* * * تدريب * (١) من الشكل المقابل :-
أوجد طول د هـ

(٢) أوجد قيمة س من كل من الاشكال الآتية :-



نتيجة (١) :-

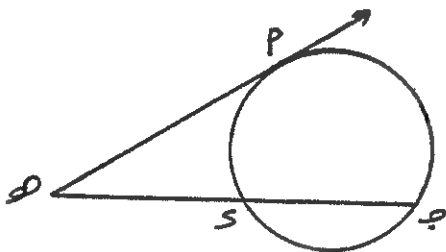
إذا رسم من نقطة خارج دائرة حاملة ومماس خارجة من نقطة خارجة طول القاطع

من طول مماسه الخارجين يساوي مربع طول المماس.

من الشكل المقابل :- P مماس للدائرة ،

هـ جـ يقطع الدائرة من س ، جـ

$$\left(P هـ \right) = هـ س \times هـ جـ$$

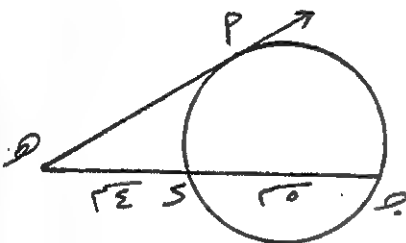


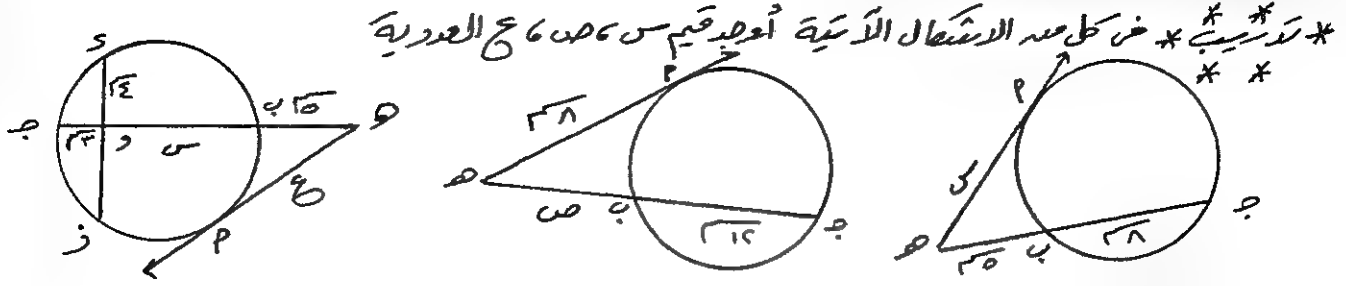
مثال © :- من الشكل المقابل :- هـ مماس للدائرة عند جـ

هـ س = ٤ سم ، جـ س = ٩ سم أوجد طول هـ م

الحل :- هـ م مماس للدائرة

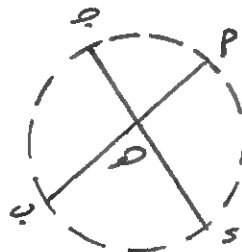
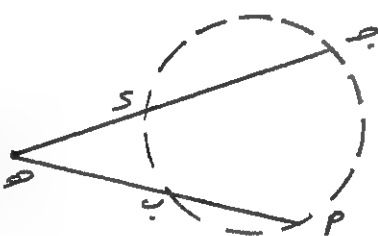
$$\therefore (P هـ) = هـ س \times هـ جـ = ٩ \times ٤ = ٣٦ \leftarrow P هـ = ٣٦$$





عكس مبرهن مشهور :-

إذا تقاطع المستقيمان الخارجيان للقطعة AB ، CD من نقطة H (مختلفة عن كل من P, B, C, S) وكان $H \times P = H \times B = H \times C = H \times S$ فإنه النقطة P, B, C, S تقع على دائرة واحدة



من الشكل المقابل :-

إذا كان $H \times P = H \times B = H \times C = H \times S$ فإنه الشكل P, B, C, S رباعي دائري

مثال ٦ :- من الشكل المقابل :-

أثبت أنه الشكل H, B, C, P رباعي دائري

$$\text{الحل :-} \quad \because H \times C = H \times B = H \times P = H \times S$$

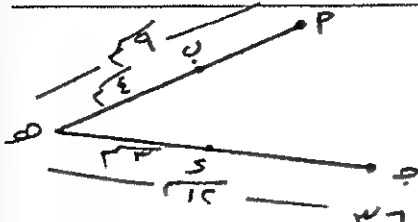
$$\therefore H \times C = H \times B = H \times P = H \times S$$

$$\therefore H \times C = H \times B = H \times P = H \times S$$

\therefore النقطة H, B, C, P تقع على دائرة واحدة ويكون الشكل H, B, C, P رباعي دائري

وهو "مخوفه" :- يحل المثال السابق بإنتاج تشابه المثلثين H, B, C و H, P, S

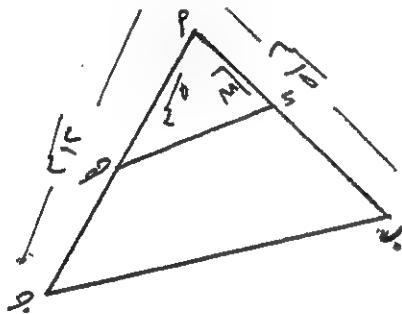
سؤال ٧ :- من الشكل المقابل :-



اثبت أنه الشكل P ب س ج ياعي دائري.

الحل :- $\therefore P \times B \times S = 40 \times 30 = 120$ ج $\therefore P \times B \times S = 50 \times 110 = 5500$ ج $\therefore P \times B \times S = 120$ ج $\therefore P \times B \times S = 5500$ ج $\therefore P \times B \times S = 120$ ج $\therefore P \times B \times S = 5500$ ج

الشكل P ب س ج ياعي دائري #

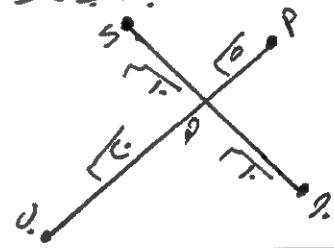
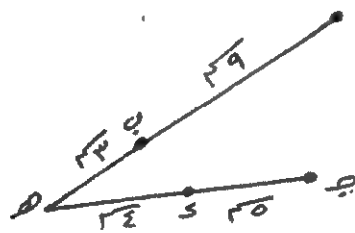
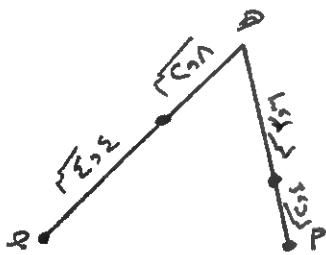


* * * ترتيب * * * في الشكل المقابل :-

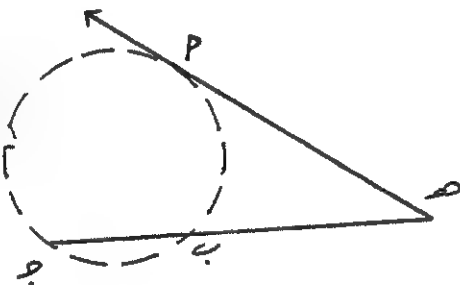
اثبت أنه الشكل S ب ج ه ياعي دائري

(c) من أي هذه الاشكال الآتية تقع النقطة

P ب ج ه على دائرة واحدة ؟ فسر واطبق



نتيجة (c) "

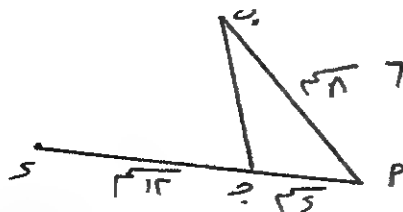


إذا كان $(P \times B \times S) = P \times B \times S$

فإنه ه ماس للدائرة المارة بالنقطة P ب ج ه

سؤال ٨ :- P ب ج ه ماس فيه P ب = P ه = ٦ سم ، P ج = ٨ سم ، S ب = ٦ سم ، S ج = ٨ سم

حيث ج ه = ٨ سم . اثبت أنه P ب ج ه ياعي الدائرة المارة بالنقطة P ب ج ه س



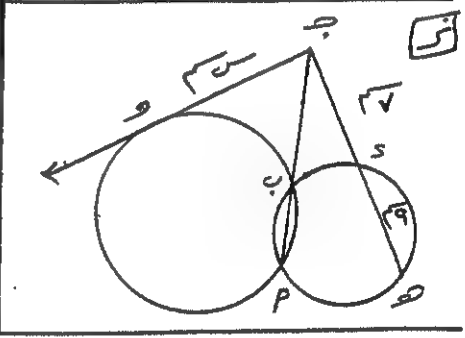
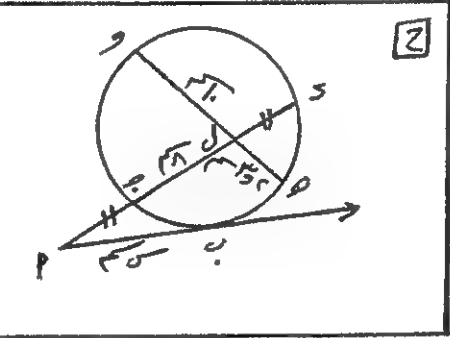
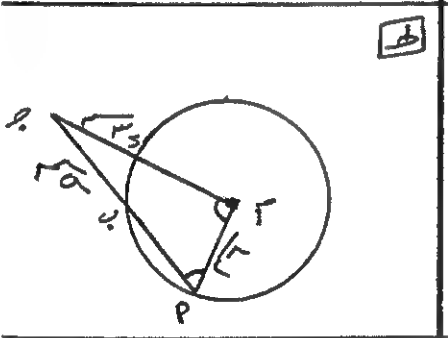
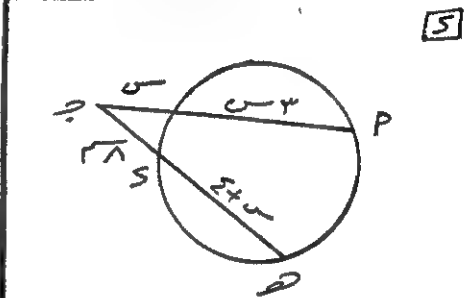
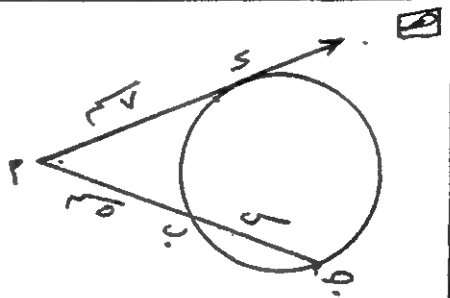
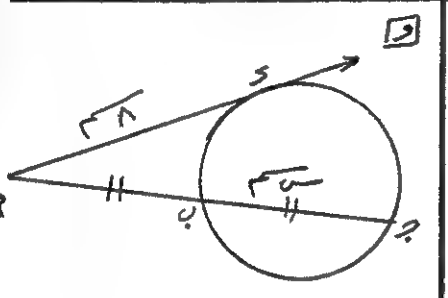
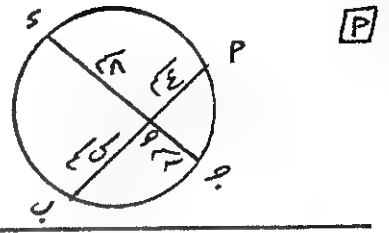
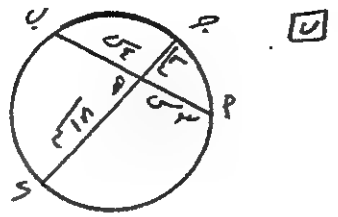
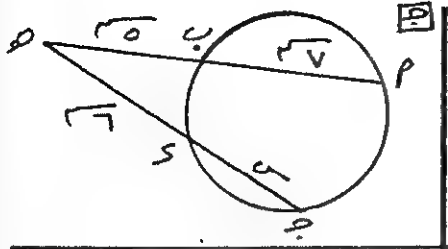
الحل :- $\therefore P \times B \times S = 6 \times 8 = 48$ ج $\therefore P \times B \times S = 16 \times 6 = 96$ ج $\therefore P \times B \times S = 48$ ج $\therefore P \times B \times S = 96$ ج

$\therefore P \times B \times S = P \times B \times S$

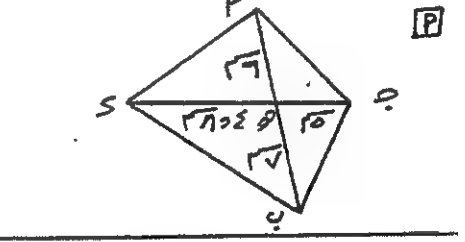
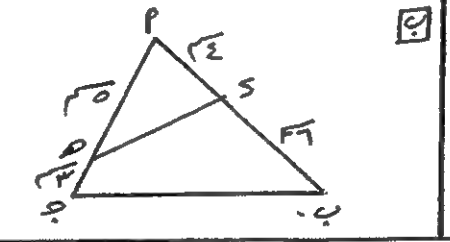
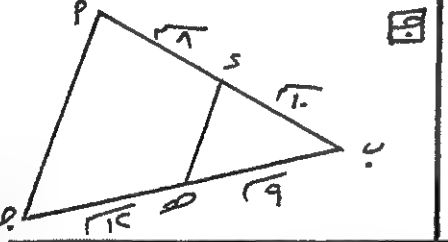
$\therefore P \times B \times S$ ياعي الدائرة المارة بالنقطة P ب ج ه س

عماد السيد على "تطبيقات التشابه من الدائرة"

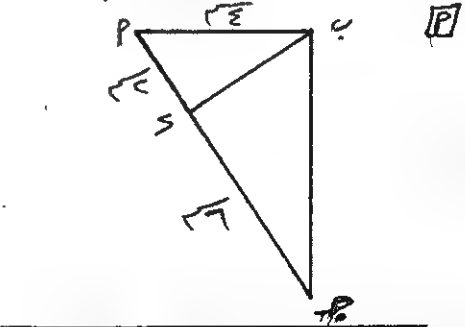
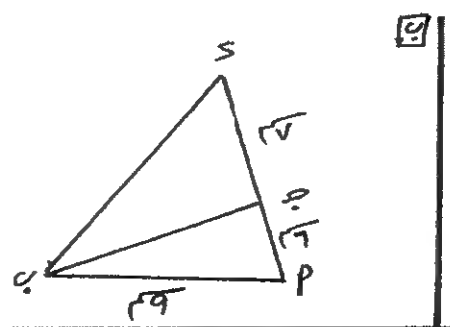
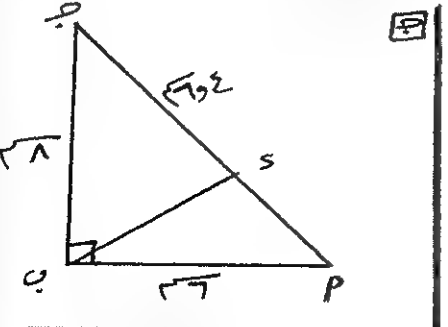
1 أوجد قيمة x من العديد من كل من الاشكال الآتية :-



2 من أى من الاشكال الآتية تقع النقطة P ، B ، C ، S على دائرة واحدة، فسر واجاب



3 من أى من الاشكال التالية P ، B ، C ، S تقع على دائرة واحدة، فسر واجاب



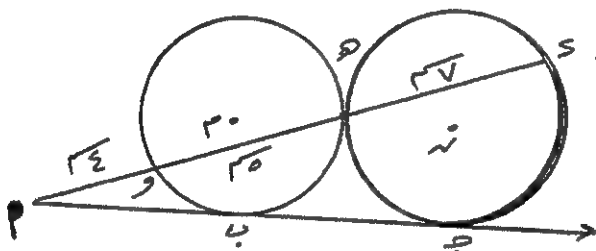
الصف الأول الثانوي

(c) الشكل لصيغة باعس دائري

ج ه = سم أُشبهت أ ن الخط ٢٦٦٦٦٦ تقع على دائرة واحدة

عاصمتناہ للراثرۃ عندس، من . اُتبعے اُنہ : جس = جس

انتہی اُنہ: صفتیں ۲۰



أثبت أن: (1) P يحاطه الدائرة التي تمر بالنقطة P ، Q .

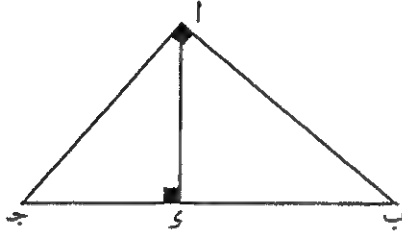
9 دائرہ عکس المکرم ، طول نصف قطر ۱۴ سم ، ۷ سم ، رسم الوتر AD فی

10. P بجس مستطیل میں $P = 6$ سم $AB = 8$ سم ، رسم بند $P \perp PQ$ قطع PQ ۔

ض \bar{P} و $\bar{P} = (P^c)$ $\therefore P \cup P^c = S$ ہم اوجہ طول \bar{P} و

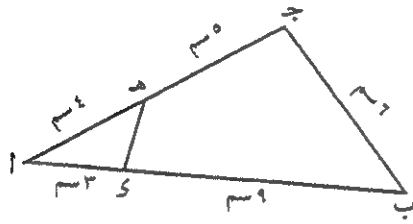
اشتبأ أن $جس = جص$

تمارين عامة



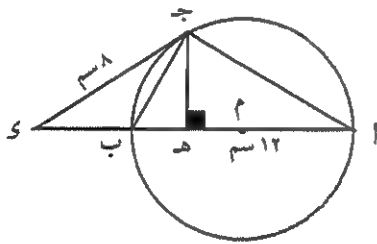
١ في الشكل المقابل: أي العبارات التالية غير صحيحة:

- أ) $AD^2 = BD \times DC$
- ب) $AB^2 = BD \times BC$
- ج) $AD \times BC = BD \times AC$
- د) $AB \times AC = AD \times BC$



٢ في الشكل المقابل: $AB \parallel DE$ ، $AD = 3$ ، $DB = 4$ ، $AE = 2$ ، $EC = 3$.
أثبت أن $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

ثم أوجد طول DE



٣ في الشكل المقابل: AB قطر في الدائرة م، طوله ١٢ سم

و $CD \perp AB$ حيث $AD = 3$ سم، $DB = 4$ سم، $CD = 2$ سم

حيث $CE = 8$ سم. $CE \perp AB$. أثبت أن:

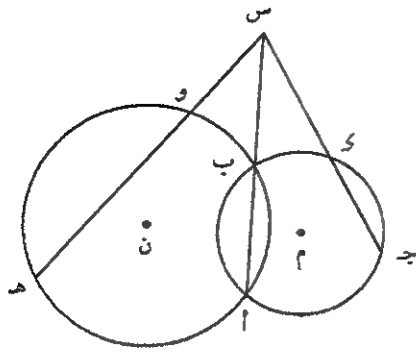
- أ) CE مماسة للدائرة م.
- ب) $\triangle CDE \sim \triangle ABC$
- ج) $CE = 8$ ، $AE = 8$

٤ أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب. $BE \perp AC$ ، $AB = 5$ سم، $AE = 9$ سم. رسم على AB ، B ج من

الخارج المربعان AB ص س، B ج هـ و.

أثبت أن المضلع AS ص ب \sim المضلع B و هـ جـ

ب) أوجد م (المضلع AS ص ب): م (المضلع B و هـ جـ)



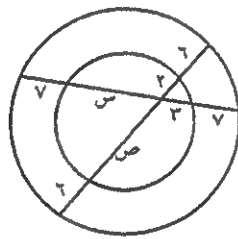
٥) في الشكل المقابل: الدائرتان م، ن متقاطعتان في ا، ب

$$\overline{أب} \cap \overline{ج د} \cap \overline{ه و} = \{س\} \text{ حيث}$$

$$س د = ٢ \text{ سم، ج ه} = ١٠ \text{ سم، و س} = ٦ \text{ سم}$$

٦) أثبت أن الشكل ج د و ه رباعي دائري.

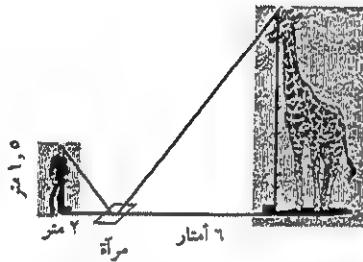
٧) أوجد طول ج د



٨) في الشكل المقابل: دائرتان متحدتا المركز،

والأطوال المبينة للقطع المستقيمة بالسنتيمترات.

أوجد قيم س، ص العددية.



٩) حديقة حيوان: في رحلة مدرسية إلى حديقة الحيوان أراد

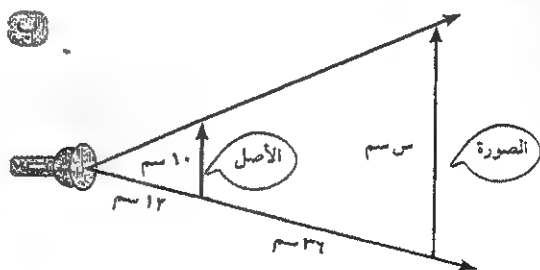
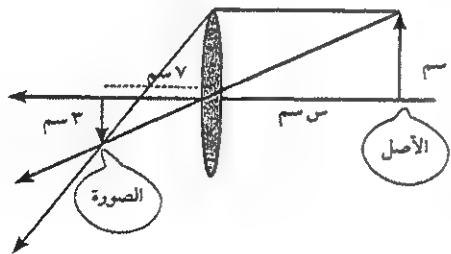
حسام أن يعرف ارتفاع حيوان الزرافة. وضع حسام مرآة

مستوية على الأرض تبعد عنه متران وعن الزرافة ٦ أمتار،

فإذا كان حسام والمرآة والزرافة على استقامة واحدة

وارتفاع حسام ١,٥ مترًا. كم يبلغ ارتفاع الزرافة.

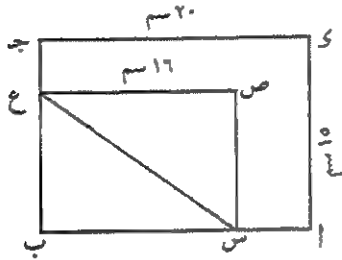
١٠) البسط بالفيديو: احسب معامل مغير البعد، واحسب قيمة س العددية في كل شكل مما يلي.



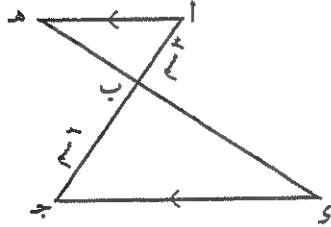
اختبار الوحدة

١) أكمل ما يأتي:

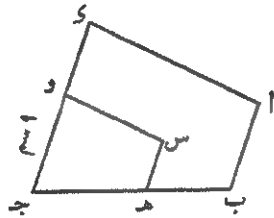
- ١) المضلعان المشابهان لثالث
- ٢) إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإنهما
- ٣) إذا كانت النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ٣ : ٥ فإن النسبة بين مساحتهما
- ٤) إذا تقاطع وتران \overline{AB} ، \overline{CD} لدائرة في نقطة S فإن:



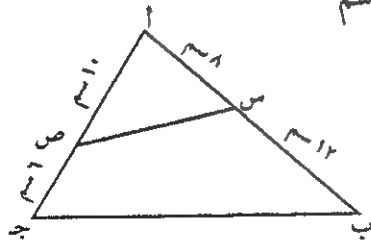
- ٥) إذا كان المستطيل AB \sim المستطيل SC ب E ص،
 $AS = 15$ سم، $CD = 20$ سم، $CS = 16$ سم
 فإن: $SE =$ _____



- ٦) في الشكل المقابل: $\overline{AH} // \overline{DE}$ ، $\overline{AG} = \overline{HD}$ ، $\{B\}$ ،
 $AB = 3$ سم، $BC = 6$ سم، $AD = 12$ سم، $DE = 12$ سم
 فأوجد طول \overline{HB}



- ٧) في الشكل المقابل: المضلع AB \sim المضلع SC هـ جـ و
 أثبت أن $\overline{AB} // \overline{SC}$
 وإذا كانت $SE = \frac{1}{4} AB$ ، جـ و = ٩ سم فأوجد طول \overline{SE}



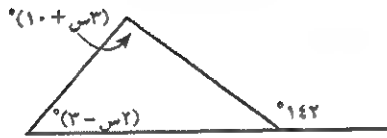
- ٨) AB جـ مثلث فيه $S \in \overline{AB}$ بحيث كان $AS = 8$ سم، $SB = 12$ سم
 $CS \in \overline{AC}$ ، بحيث كان $AS = 10$ سم، $CS = 6$ سم.
 أثبت أن:
 ١) $\triangle ABC \sim \triangle SCS$
 ٢) الشكل SC ب جـ ص رباعي دائري.

- ٩) AB ، \overline{CD} وتران في دائرة متقاطعان، في H فإذا كان H منتصف \overline{AB} ، جـ هـ = ٤ سم، هـ د = ٩ سم
 فأوجد طول \overline{AB} .

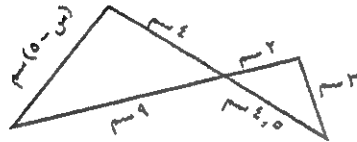
اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

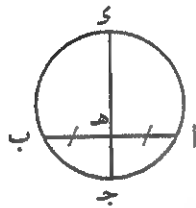
١) إذا كان $\frac{1+s}{1+s} = \frac{2}{3}$ فإن $11-s$ تساوي:
 ١٠ ٥ ٥١ ٢٧



٢) مستعينًا بمعطيات الشكل، فإن s تساوي:
 ١٨ ٣٢ ٥١ ٢٧

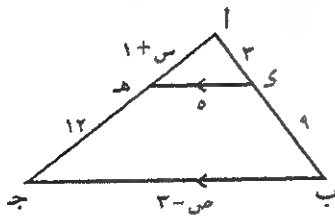


٣) مستعينًا بمعطيات الشكل، فإن s تساوي:
 ١١ ٥ ١٤ ١٢



٤) في الشكل المقابل: $AB = 12$ سم، $JD = 4$ سم، فإن AD تساوي:
 ٦ سم ٥ سم ٩ سم ٨ سم

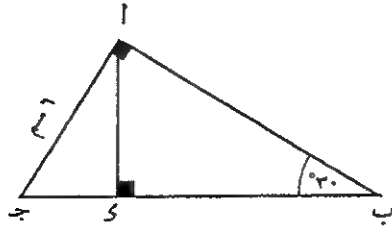
٥) مستطيلان متشابهان بعدد الأول ١٠ سم، ٨ سم، ومحيط الثاني ١٠٨ سم فإن طول المستطيل الثاني يساوي:
 ١٨ سم ٢٤ سم ٣٠ سم ٣٦ سم



الأسئلة ذات الإجابات القصيرة:

٦) في الشكل المقابل: أوجد قيمة كل من s ، v ، الأطوال مقدرة بالسنتيمترات.

٧) AB ج مثلث فيه $AB = AC$ و D على BC رسم $AD \perp AB$ ، و $AD \perp AC$.
 أثبت أن: $\frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AC}$



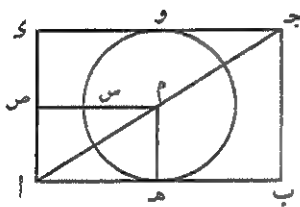
٨٨ في الشكل المقابل: $\overline{AB} \perp \overline{AD}$ ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

و $\angle B = 30^\circ$ ، $AB = 6$ سم

أوجد طول كل من: \overline{AD} ، \overline{BD} ، \overline{DC}

التمارين ذات الإجابات الطويلة:

٨٩ \overline{AB} جد \overline{CD} شبه منحرف تقاطع قطراه في هـ، إذا كان $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ أثبت أن: $\frac{AH}{HD} = \frac{CE}{ED}$



٩٠ في الشكل المقابل: \overline{AB} جد \overline{CD} مستطيل، م دائرة طول نصف قطرها ٦ سم

وتمس \overline{AB} عنده، \overline{CD} عنده.

رسم م ص $\parallel \overline{AB}$ ويقطع الدائرة في س، \overline{AD} في ص.

إذا كان: س ص = ٢ سم، $\frac{1}{4} = \frac{m(\triangle AHD)}{m(\triangle ABC)}$

أوجد طول \overline{BD} ، \overline{CD}

الوحدة الرابعة

نظريات التناسب في المثلث

(١) المستقيمات المتوازية والاجزاء المتناسبة

(٢) نظرية تاليس

(٣) منصفات الزوايا والاجزاء المتناسبة

(٤) تطبيقات التناسب في الدائرة

تمارين عامة علي الوحدة

اختبار الوحدة

(١) المستقيمان المتوازيين والأجزاء المتناسبة

نظرية (١) :-

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث وقطع الضلعين الآخرين فإنه

يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة .

في الشكل المقابل :- ΔPAB فيه $DE \parallel AB$

$$\therefore \frac{DP}{PB} = \frac{SE}{EB}$$

كما لاحظ أنه :-

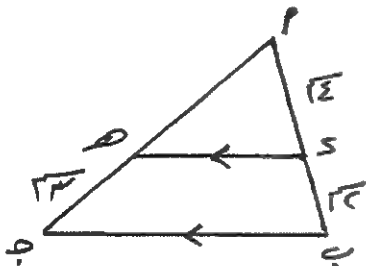
$$\left(\frac{\text{مقدم} + \text{تالي}}{\text{تالي}} = \frac{\text{مقدم} + \text{تالي}}{\text{تالي}} \right)$$

"مخرجوا من القياس"

$$\frac{DP}{PB} = \frac{SE}{EB} \Leftrightarrow \frac{DP + PB}{PB} = \frac{SE + EB}{EB} \Leftrightarrow \frac{PB}{PB} = \frac{EB}{EB}$$

$$\therefore \frac{DP}{PB} = \frac{SE}{EB} \quad \text{أي أنه :-}$$

$$\frac{DP}{PB} = \frac{SE}{EB} \quad \text{وعليه استنتاج أيضا :-}$$

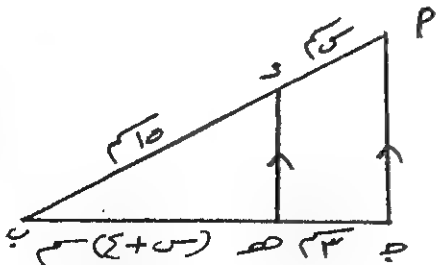


مثال ١ :- في الشكل المقابل :-

أوجد طول AP

الحل :- $DE \parallel AB$

$$\therefore \frac{DP}{PB} = \frac{SE}{EB} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Leftrightarrow \frac{DP}{3} = \frac{4}{6} \Leftrightarrow DP = \frac{4 \times 3}{6} = 2$$



مثال ٢ :- في الشكل المقابل :-

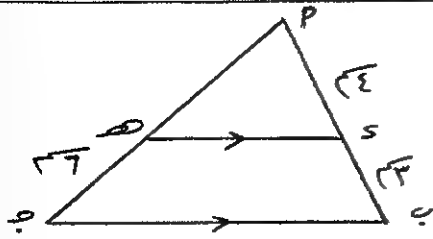
أوجد قيمة SE

الحل :- $DE \parallel AB$

$$\therefore \frac{DP}{PB} = \frac{SE}{EB} \Leftrightarrow \frac{10}{5} = \frac{SE}{3} \Leftrightarrow SE = \frac{10 \times 3}{5} = 6$$

$$\therefore SE = 6 \quad \text{أو} \quad SE = 6 \quad \text{أو} \quad SE = 6 \quad \text{أو} \quad SE = 6$$

$$\# \quad SE = 6$$

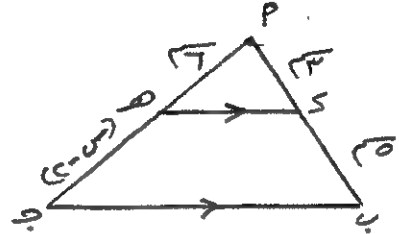
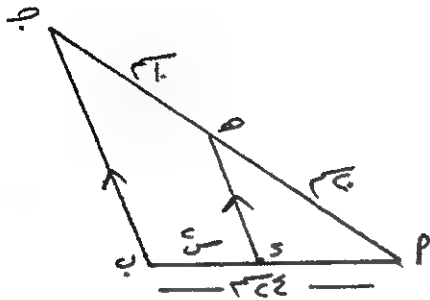


* * * تدريب * (١) من الشكل المقابل :-

PD بـ فيه D على PB و AD || AB

أوجد طول AD

(٢) أوجد قيمة x العددية من كل مما يأتي :-

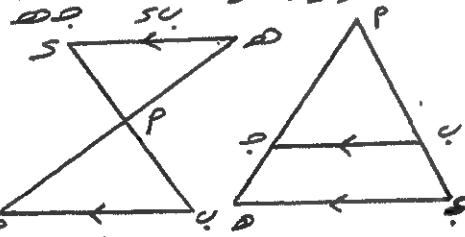


"نتيجة" :- إذا رسم مستقيم خارج مثلث PAB يوازي ضلعاً من أضلاع المثلث ،

ولم يكن بهـ ويقطع PA و PB في D و E على الترتيب فإذن $\frac{PD}{DA} = \frac{PE}{EB}$

من الشكل المقابل :- بتطبيق خواص التقاسيم

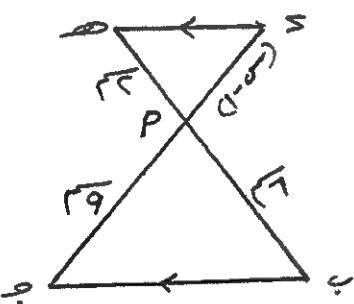
$$\frac{PD}{DA} = \frac{PE}{EB} \quad \text{و} \quad \frac{PD}{DA} = \frac{PE}{EB} \quad \text{لنتنبأ أنه :-}$$



مثال (٣) :- من الشكل المقابل :-

أوجد قيمة x

الحل :- $AD \parallel BE$

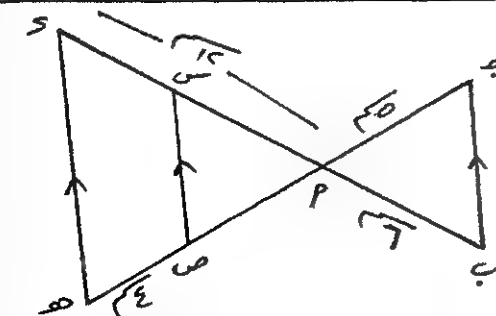


$$\frac{PD}{DA} = \frac{PE}{EB} \Rightarrow \frac{9}{1-x} = \frac{6}{x} \Rightarrow 9x = 6(1-x) \Rightarrow 9x = 6 - 6x \Rightarrow 15x = 6 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

مثال (٤) :- من الشكل المقابل :-

أوجد طول كل من AD و BE

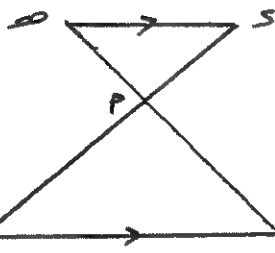
الحل :- $AD \parallel BE$ $\therefore \frac{PD}{DA} = \frac{PE}{EB}$



$$\therefore \frac{SP}{PS} = \frac{1}{2} \Leftarrow SP = \frac{5 \times 1}{2} = 2.5$$

$$\text{في } \triangle SPQ \quad \therefore \frac{SP}{PS} = \frac{PQ}{SQ} \quad \therefore \frac{1}{2} = \frac{PQ}{4} \quad \therefore PQ = 2$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



* * * (1) في الشكل المقابل :-

$$AB \parallel CD \quad \therefore \frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD}$$

$$PA = 3, PB = 4, PC = 6, PD = 8 \quad \therefore \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

(2) في الشكل المقابل :-

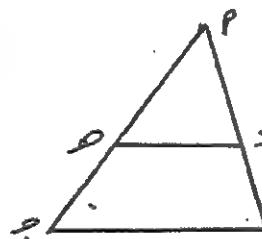
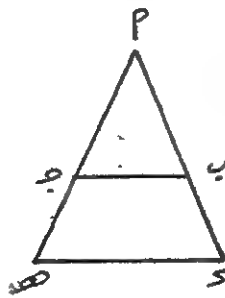
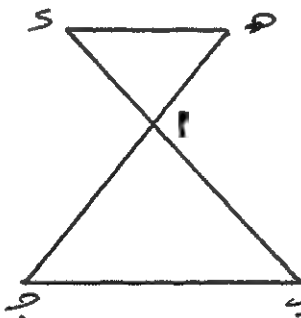
$$\text{إذا كان } PA = 3, PB = 4, PC = 6, PD = 8 \quad \therefore \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

$$\text{إذا كان } PA = 3, PB = 4, PC = 6, PD = 8 \quad \therefore \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

عكس نظرية (1) :-

إذا قطع مستقيم خطين متوازيين، وقسموا إلى أطوال متناسبة

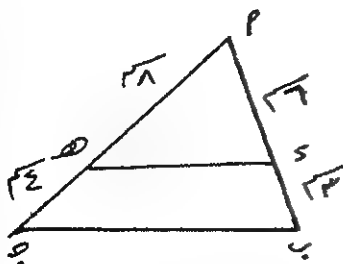
فإنه يوازي الضلع الثالث.



في الشكل المقابل :-

$$\text{إذا كان } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

فإنه يوازي الضلع الثالث.



مثال (2) :- في الشكل المقابل :- أثبت أنه $DE \parallel BC$

$$\text{الحل :- في } \triangle ABC \quad \therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \therefore DE \parallel BC$$

الابداع في الرياضيات

(۱) اُنْصَبَتْ اَنْهَ دَكَّهَ الْبَقَّ (۲) اَوْ جَدُّهُ لَیَّجَ

∴ $\delta \text{ } \delta P \text{ قائم فر } P \Leftarrow (S^P) - (S^Q) = (S^R) \text{ "میانگورت"}$

$$\sqrt{r} = sp \Leftarrow 9 = 17 - 8 = (sp) \therefore$$

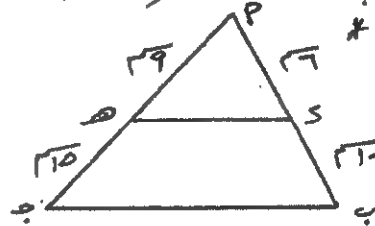
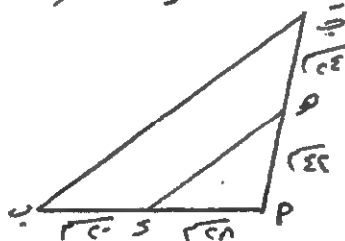
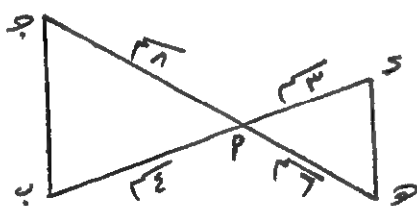
$$\frac{dp}{ds} = \frac{sp}{s} \therefore$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{n} = \frac{OP}{PQ} \quad \therefore \frac{1}{2} = \frac{4}{7} = \frac{SP}{QS} \quad \therefore$$

$$\frac{ds}{du} = \frac{sp}{up} \therefore \Delta u P \Delta N \Delta s P \Delta \therefore$$

$$\# \sqrt{10} = \frac{9 \times 0}{3} = 0 \leftarrow \frac{0}{3} = \frac{0}{9} \therefore$$

* * * * * خَيْرُ كُلِّ مَرَدٍّ الْإِسْتِغْنَاءُ عَنِ النَّاسِ إِذَا كَانَ فِي يَدَيْهِ أَمْوَالٌ



فصل (۷) :- پرجہ کی شکل و رنگ و مزہ و آہ و آواز و آج و صحت و بدن و آباء

بِسْمِ مَدْعِ الْجَدِّ وَيَقْطَعُ مَدَّ فَرَجٍ. انْتَبِهْ أُنْهَ مَدْعِ الْاَبَدِ

الكلية :- قسم P.D

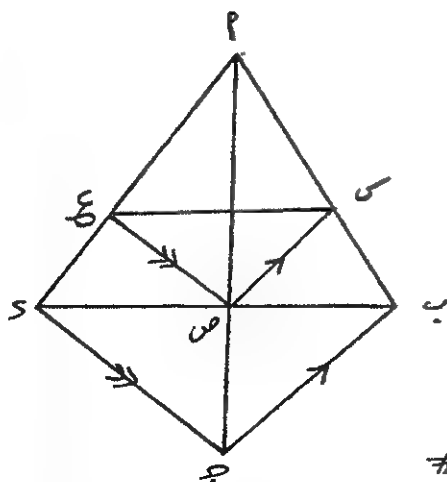
∴ $\frac{\text{مساجد}}{\text{مساجد}} = \frac{\text{مساجد}}{\text{مساجد}} \rightarrow ①$

فر Δ SP ص

$$\textcircled{F} \leftarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial \phi}}{\frac{\partial \phi}{\partial \phi}} = \frac{\partial P}{\partial \phi} \therefore \overline{SD} \parallel \overline{SP} \therefore$$

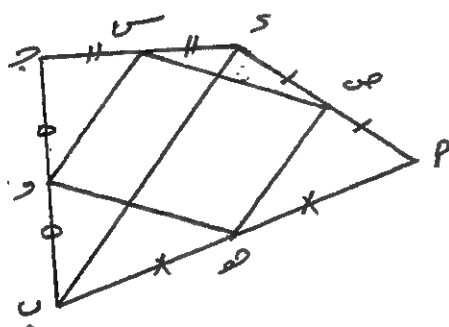
مس ① ⑥ ⑤ ینبع ان $\frac{EP}{sE} = \frac{0.5P}{0.5}$

$\overline{501185} \therefore \frac{81}{58} = \frac{59}{35} \therefore \text{sup } \Delta$



* تدريبات *
 مبدى شكل رباعي تقاطع قطراه م. رسم م ه // P و تقطع P ب م ه
 ورسم م د // ا ب و تقطع ب م ه و . أثبت أنه ه د // ا ب .

مثال ① :- إذا كان ه ، و ، س من منتصفات الأضلاع P ب ، ب م ه ، م ه ، م ب
 الرباعي م ب ج د . هل الشكل ه و س من متوازي أضلاع ؟



الحل :- القل :- ترسم ب م

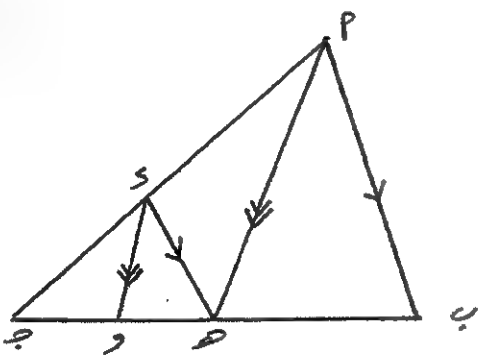
من م ب س :- ه منتصف P ب ، ه منتصف م ب

:- ه د // ا ب ، ه ه = ح ب ← ①

من م ب ج :- ه منتصف ب م ، ه منتصف م ج

:- و س // ا ب ، و س = ح ب ← ②

من ① ، ② يتبع أنه ه د // و س ، ه ه = و س :- الشكل ه و س من متوازي أضلاع #



مثال ② :- من الشكل المقابل :- P ب ج مثلث ، د س ج

د ه // ا ب ، د و // ا ه . أثبت أنه (ج ه) = ج و د ب

البرهان :-

من م ب ج :-

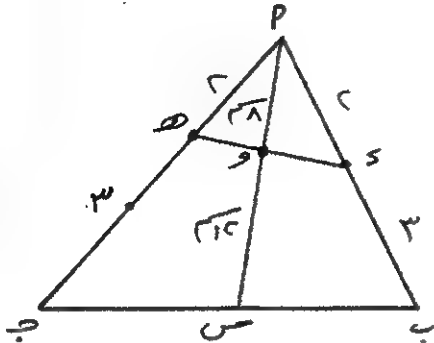
:- د ه // ا ب :- $\frac{ج د}{ج ب} = \frac{د س}{د م} \leftarrow ①$

من م ب ج :-

:- د و // ا ه :- $\frac{ج د}{ج ه} = \frac{د س}{د م} \leftarrow ②$

من ① ، ② $\frac{ج د}{ج ب} = \frac{ج د}{ج ه} \leftarrow (ج ه) = ج و د ب \#$

مثال ١٠ :- P ابداع مثلث ABC ، حيث $AP = 3$ ، $BP = 4$ ، $CP = 5$ ، حيث $AP \perp BC$ ، $BP \perp AC$ ، $CP \perp AB$ ، حيث AP رسم AS يقطع BC في S . وإذا كان P هو AM ، $AN = 3$ ، $BN = 4$ ، حيث AN و BM اثبت أن النقط S ، M ، N على استقامة واحدة .



$$\frac{AP}{PS} = \frac{BP}{PM} \iff \frac{3}{PS} = \frac{4}{PM} \iff \frac{3}{4} = \frac{PS}{PM}$$

$$\frac{BP}{PM} = \frac{CP}{PN} \iff \frac{4}{PM} = \frac{5}{PN} \iff \frac{4}{5} = \frac{PM}{PN}$$

الحل :- من ΔPMS

$$\frac{PS}{PM} = \frac{AP}{BP} = \frac{3}{4} \quad , \quad \frac{PM}{PN} = \frac{BP}{CP} = \frac{4}{5}$$

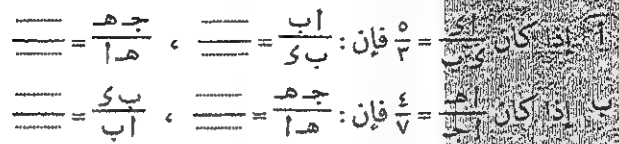
$$\therefore \frac{PS}{PM} = \frac{PM}{PN} \iff PS \parallel MN \iff \text{نقطة } S \text{ على } MN$$

$$\frac{PS}{PM} = \frac{AP}{BP} = \frac{3}{4} \quad , \quad \frac{PM}{PN} = \frac{BP}{CP} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \frac{PS}{PM} = \frac{PM}{PN} \iff PS \parallel MN \iff \text{نقطة } S \text{ على } MN$$

منه S ، M ، N : ونقطة مشتركة بين AS ، BM ، CN : لنقط S ، M ، N على استقامة واحدة .

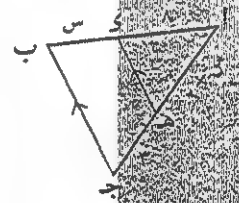
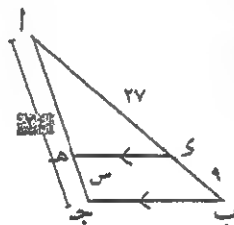
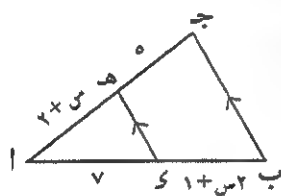
① في الشكل المقابل وهـ // بـ جـ أكمل:



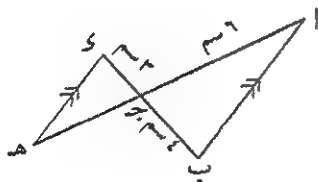
اب
کے

جواب

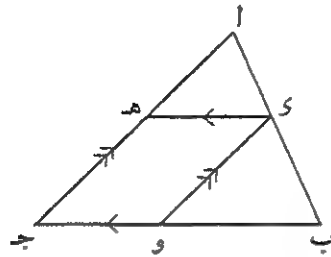
$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$



اوجہ طول خط



٥) س ص ٨ ع ل = م، حيث س ع // ل ص، فإذا كان س م = ٩ سم، ص م = ١٥ سم، ع ل = ٣٦ سم. أوجد طول ع م.



٦) لكل مما يأتي: استخدم الشكل المقابل والبيانات المعطاة لإيجاد قيمة س:

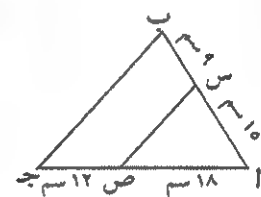
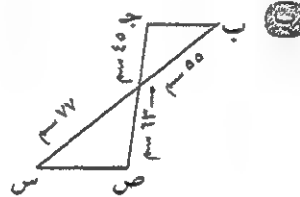
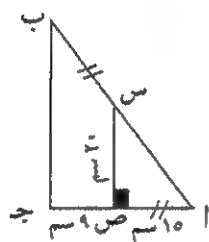
أ) ٤ = س، ٨ = ب، ٦ = ج، ٦ = د، ٨ = هـ = س.

ب) ٣ = س، ٥ = هـ، ٥ = ج، ٢ = س، ٢ = ب، ٣ = د.

ج) ٢١ = أب، ٨ = ب، ٦ = ج، ٦ = د، ٢ = س.

د) ١٢ = س، ٥ = ب، ٥ = س، ٥ = د، ٢ = ب، ٣ = ج، ١٢ = د.

٧) في كل من الأشكال التالية، حدد ما إذا كان س ص // ب جـ



٨) س ص ع مثلث فيه س ص = ١٤ سم، س ع = ٢١ سم، ل ٣ س ص بحيث س ل = ٦، ٥ سم،

م ٣ س ع حيث س م = ٨، ٤ سم. أثبت أن ل م // ص ع

٩) في المثلث أ ب جـ، ٣ أ ب، هـ ٣ أ جـ، ٥ هـ = ٤ هـ جـ

إذا كان أ د = ١٠ سم، د ب = ٨ سم. حدد ما إذا كان د هـ // ب جـ. فسر إجابتك.

١٠) أ ب جـ د شكل رباعي تقاطع قطراه في هـ فإذا كان أ هـ = ٦ سم، ب هـ = ٣ سم، هـ د = ١٠ سم،

هـ د = ٧، ٨ سم. أثبت أن الشكل أ ب جـ د شبه منحرف.

١١) أثبت أن القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين في مثلث يوازي ضلعه الثالث، وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع.

١٢) أ ب جـ مثلث، د ٣ أ ب حيث أ د = ٢، د ب = ٥، هـ ٣ أ جـ حيث هـ جـ = ٢، رسم أ س يقطع ب جـ في س. إذا كان أ و = ٨ سم، أ س = ٢٠ سم، حيث و ٣ أ س. أثبت أن النقط د، و، هـ على استقامة واحدة.

١٣) أ ب جـ مثلث، د ٣ ب جـ، بحيث د جـ = ٢، هـ ٣ أ د، بحيث هـ د = ٢، رسم جـ هـ يقطع أ ب في س، رسم د و // جـ س فقطع أ ب في و. أثبت أن أ س = ب و.

١٤) أ ب جـ د مستطيل تقاطع قطراه في م. هـ منتصف أ م، و منتصف م جـ. رسم و هـ يقطع أ ب في س، ورسم د و يقطع ب جـ في و. أثبت أن: س و // أ جـ.

مكتبة وصال

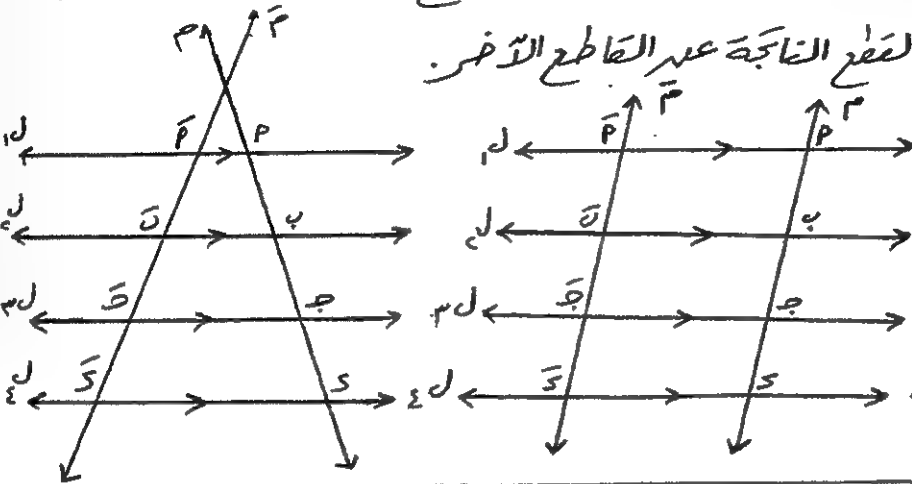
شروين - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات
01004423597.3943035

١١ نظرية تاليس

نظرية ١١ [نظرية تاليس العامة]:

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمتين متوازيتين فإنه أطوال القطع الناتجة عند التقاطع تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة عند التقاطع الآخر.

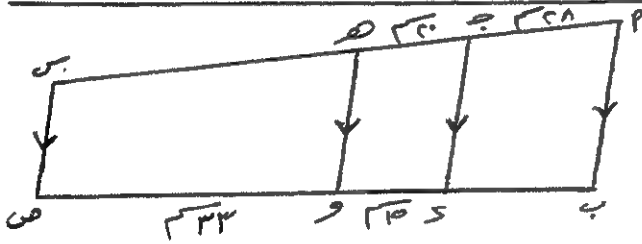
في الشكل المقابل:



إذا كان $a \parallel b \parallel c \parallel d$

و m, n قاطعتين لهما قاطعة واحدة:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} \dots$$



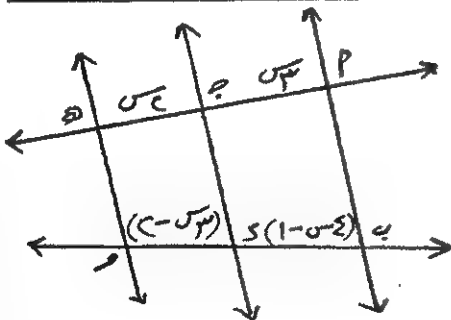
مثال ١: في الشكل المقابل:

أوجد طول كل من BE و ED

الحل: $\because \overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$

$$\because \frac{AB}{BE} = \frac{BC}{CE} = \frac{CD}{DE} \Leftrightarrow \frac{3}{BE} = \frac{4}{CE} = \frac{5}{DE}$$

$$\because BE = \frac{3 \times 4}{5} = 2.4 \text{ سم} \quad \# \quad DE = \frac{4 \times 5}{3} = 6.67 \text{ سم}$$



مثال ٢: في الشكل المقابل:

أوجد قيمة x العددية

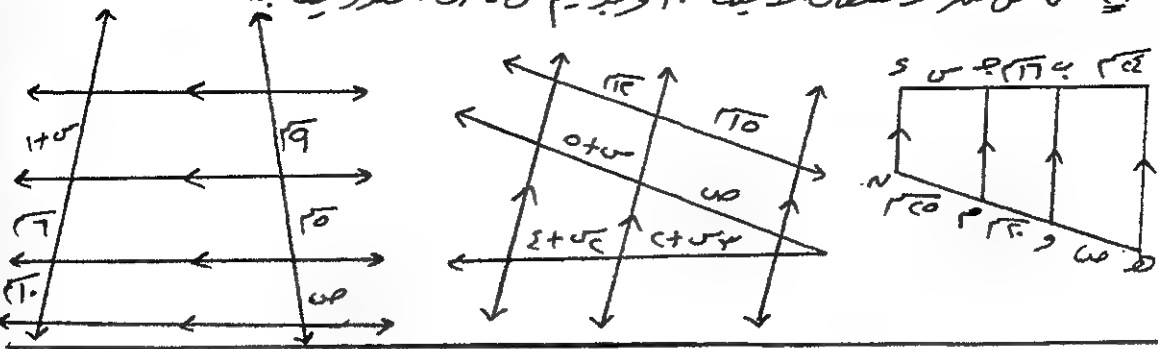
الحل: $\because \overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$

$$\because \frac{AB}{BE} = \frac{BC}{CE} = \frac{CD}{DE} \Leftrightarrow \frac{3}{BE} = \frac{4}{CE} = \frac{5}{DE}$$

$$7 + x = 58 - 9 \Leftrightarrow x = 51 - 7 = 44$$

$$\boxed{x = 44}$$

(١) من كل عدد الاشكال الآتية. أوجد قيم s من العددية :-

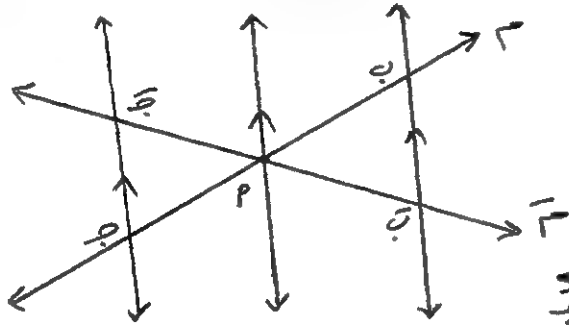


هذه مسألة خاصة :-

إذا تقاطع مستقيمان m و n من النقطة P

وكان $\vec{PB} \parallel \vec{AC}$ فإنه $\frac{\vec{BP}}{\vec{CP}} = \frac{\vec{AP}}{\vec{AP}}$

وبالعكس :- إذا كان $\frac{\vec{BP}}{\vec{CP}} = \frac{\vec{AP}}{\vec{AP}}$ فإنه $\vec{PB} \parallel \vec{AC}$



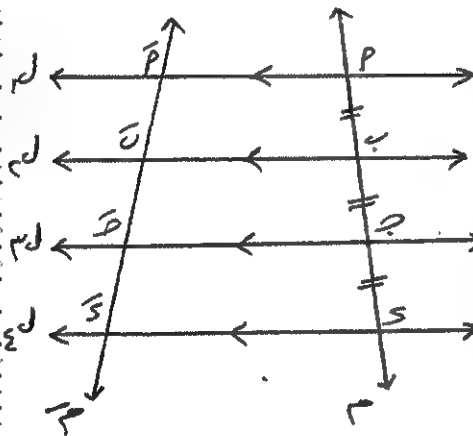
نظرية تاليس خاصة :-

إذا كانت l طول القطع الناجبة عند أحد القاطعين

متساوية فإنه l طول القطع الناجبة عند القاطع الآخر متساوية.

من الشكل المقابل :- $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ و m و n قاطعانها

وكانه $BP = BQ = CR = CR = DP = DP = EP = EP$.

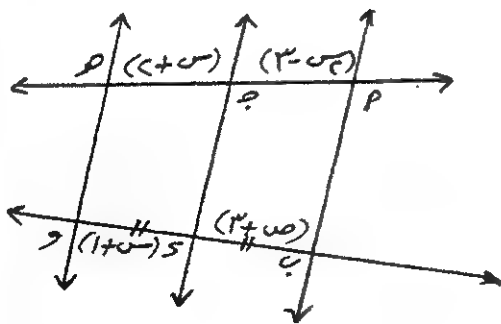


مثال ٣ :- من الشكل المقابل :-

أوجد قيم s العددية

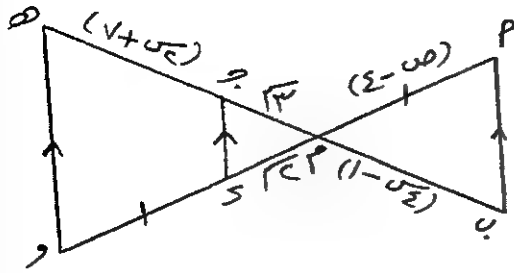
الحل :- $\because \vec{PB} \parallel \vec{AC} \parallel \vec{DE}$

$\therefore \vec{BS} = \vec{ST} \quad \therefore \vec{BP} = \vec{PT}$



$$0 = s \Leftrightarrow 3 + s = s = s \Leftrightarrow s + s = 3 - s \Leftrightarrow s = 3$$

$$3 = s \Leftrightarrow 7 = 3 + s \Leftrightarrow 1 + 0 = 3 + s \Leftrightarrow 1 + s = 3 + s \Leftrightarrow s = 5$$



مثال ٤ :- من الشكل المقابل :-

أوجد قيم SP و SB من العودية .

الحل :- $SP \parallel SB \parallel SB$ وهو

$$\therefore \frac{SP}{SB} = \frac{SP}{SB} = \frac{SP}{SB}$$

$$\frac{2-s\sqrt{2}}{1+s\sqrt{2}} = \frac{2}{3} = \frac{2-s\sqrt{2}}{1-s\sqrt{2}} \Leftarrow$$

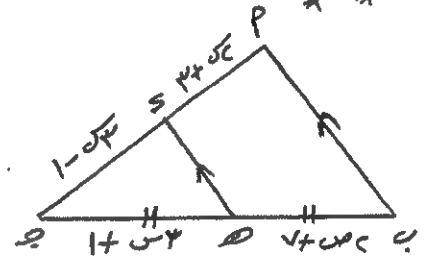
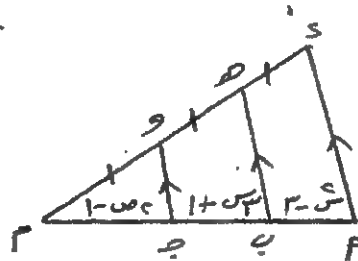
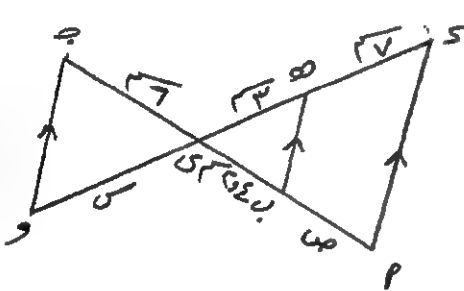
$$1+s\sqrt{2} = 1-s\sqrt{2} \Leftarrow \frac{2-s\sqrt{2}}{1+s\sqrt{2}} = \frac{2-s\sqrt{2}}{1-s\sqrt{2}} \Leftarrow$$

$$\# \boxed{2=0} \Leftarrow 1 = s\sqrt{2} \Leftarrow 1+1 = s\sqrt{2} - s\sqrt{2} \therefore$$

$$10 = 2-s\sqrt{2} \Leftarrow \frac{2}{3} = \frac{2-s\sqrt{2}}{10} \Leftarrow \frac{2}{3} = \frac{2-s\sqrt{2}}{1-s\sqrt{2}} \therefore$$

$$\# \boxed{12=SP}$$

* * * * *
من كل هذه الاشكال الآتية أوجد قيمه كلا من SP و SB من العودية :-



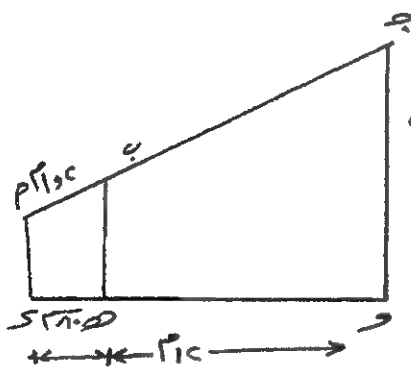
مثال ٥ :- من الشكل المقابل :-

س، هـ، و مساقط P ، B ، C على الأفق بنفس الإرتفاع

$$AB = 2 \text{ و } AC = 3 \text{ و } HD = 28$$

أوجد طول PC و BC و PD

الحل :- $SP \parallel SB \parallel SB$ وهو

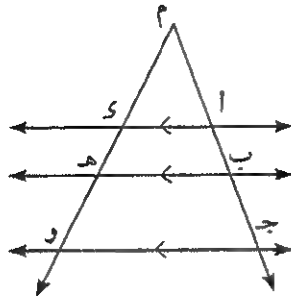


$$\therefore \frac{SP}{SB} = \frac{SP}{SB} = \frac{SP}{SB} \therefore \frac{28}{10} = \frac{2}{3} = \frac{2-s\sqrt{2}}{1-s\sqrt{2}} \Leftarrow$$

$$\# \therefore 28 = \frac{10 \times 2}{3} = \frac{20}{3} \therefore$$

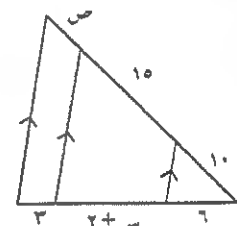
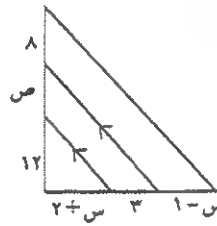
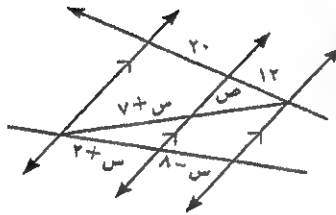
تماديد على "نظرية تاليس"

١٥) اكتب ما تساويه كل من النسب التالية مستخدماً الشكل المقابل:



١) $\frac{ab}{bc} = \frac{de}{ef}$	٢) $\frac{ab}{bc} = \frac{de}{ef}$
٣) $\frac{ab}{bc} = \frac{de}{ef}$	٤) $\frac{ab}{bc} = \frac{de}{ef}$
٥) $\frac{ab}{bc} = \frac{de}{ef}$	٦) $\frac{ab}{bc} = \frac{de}{ef}$
٧) $\frac{ab}{bc} = \frac{de}{ef}$	٨) $\frac{ab}{bc} = \frac{de}{ef}$
٩) $\frac{ab}{bc} = \frac{de}{ef}$	١٠) $\frac{ab}{bc} = \frac{de}{ef}$

١٦) في كل من الأشكال التالية، احسب قيم س، ص العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



١٧) في الشكل المقابل:

$\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{M\}$ ، $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ،
 $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ، $\overline{AM} = 10$ ، $\overline{CM} = 15$

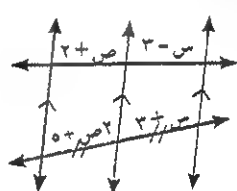
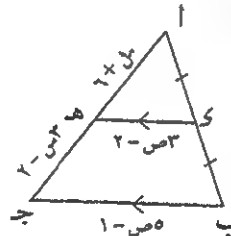
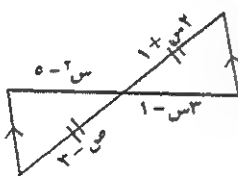
أوجد:

١) طول \overline{AM}
 ٢) طول \overline{CM}

١٨) $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{M\}$ ، $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ، وكان $\overline{AM} = 10$ ، $\overline{CM} = 15$

أثبت أن: $AM \times CM = BM \times DM$

١٩) في كل من الأشكال التالية، احسب قيم س، ص العددية:



٢٠) ا ب ج د شكل رباعي فيه $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، تقاطع قطراه في م، نصف \overline{BD} في هـ،

ورسم $\overline{HO} \parallel \overline{BA}$ ، ويقطع \overline{BD} في س، \overline{AC} في ص، \overline{AO} في و.

أثبت أن:

١) $\frac{AS}{SM} = \frac{BS}{MS}$

٢) $\frac{1}{4} \overline{AB} = \overline{HO}$

(٣) مميزات الزوايا والأجزاء المتناسبة

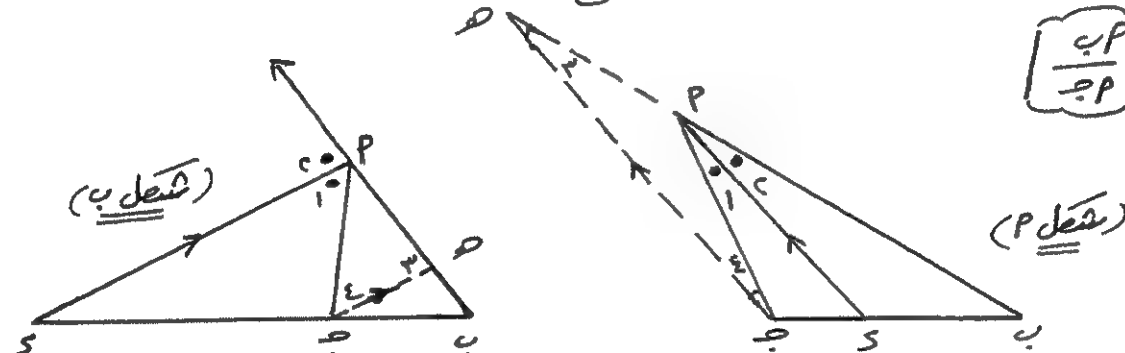
نظرية (٣) :-

إذا نُصِفَت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عندهذا الرأس
فيسمى المُنصف مُعادلة المثلث عند الداخل أو الخارج إلى جزئيه النسبة بين طوليها
لتساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين.

في الشكل المقابل :- P ب ج مثلث

SP ينصف $د ب$ P (عند الداخل في شكل P ، عند الخارج في شكل $ب$)

$$\therefore \frac{BP}{BP} = \frac{SP}{SP}$$



البرهان :-

$$\therefore SP \text{ ينصف } د ب \quad \therefore \angle 1 = \angle 2$$

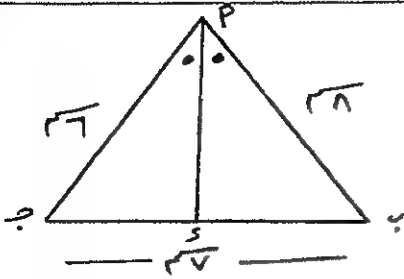
$$\therefore د ه \parallel SP \quad \therefore \angle 1 = \angle 3 \quad \text{(بالتبادل)} \quad \angle 2 = \angle 4 \quad \text{(بالتقاطع)}$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 \quad \therefore \angle 2 = \angle 4 \quad \therefore \angle 1 = \angle 4$$

$$\therefore د ه \parallel SP \quad \therefore \frac{BP}{BP} = \frac{SP}{SP} \quad (c)$$

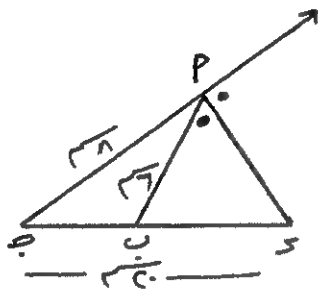
$$\text{من (1) و (c) ينتج أن } \frac{BP}{BP} = \frac{SP}{SP} \quad \neq$$

مثال (١) :- AP ب ج مثلث فيه $AP = 4$ ، $BP = 6$ ، $CP = 8$ ، رسم AP ينصف
 $د ب$ P وتقطع $د ب$ في $د$ أو جد طول كل من $د ب$ و $د ج$
الحل :-



∴ P هي منتصف $BC > AP$ ∴ $\frac{BP}{AP} = \frac{PC}{AC} \Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{7}{15}$
 $5 \times 6 = 30 = 2 \times 15 = 30 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{15} = \frac{PC}{AC}$
 $\Rightarrow 15 = 3 \times 5 \Rightarrow PC = 5 \times 7 = 35$ (بـ)

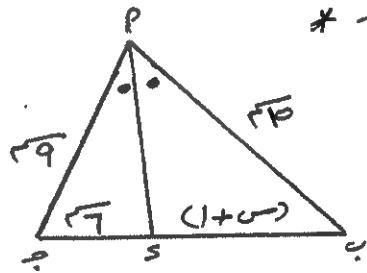
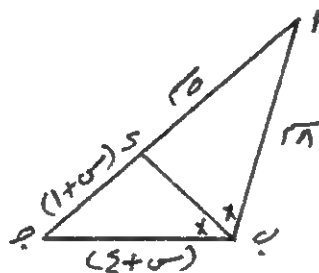
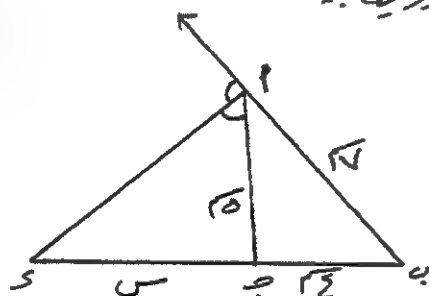
مثال ١٥ ∴ P هي منتصف الزاوية الخارجية للمثلث عند P ويقطع AB في P
 فإذا كان $AP = 6$ ، $BP = 6$ ، $PC = 5$ ، $AC = 10$ ، أوجد طول AB .



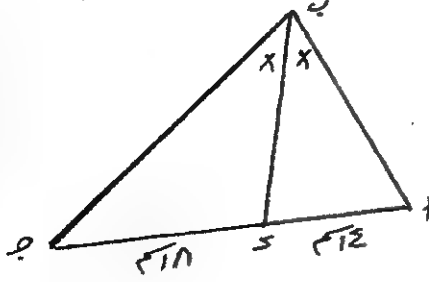
الحل ∴ ∴ P هي منتصف $P > AB$ الخارجية

∴ $\frac{AP}{AB} = \frac{PC}{AC} \Rightarrow \frac{6}{AB} = \frac{5}{10} \Rightarrow \frac{6}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 12$
 $\Rightarrow 10 - 0 = 10 = PC \Rightarrow \therefore 10 = \frac{5 \times 6}{1} = 30$

* * * ترتيب * في كل من الاشكال الآتية أوجد قيمة s العددية ∴ * *



مثال ١٦ ∴ P هي منتصف BC رسم AP ويقطع AB في P ، حيث $AP = 12$ ، $BP = 6$ ، $PC = 7$ ، $AC = 10$ ، أوجد طول كل من AB و BC .



الحل ∴ ∴ P هي منتصف $P > AB$ ∴ $\frac{BP}{AP} = \frac{PC}{AC} \Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{7}{15}$

∴ $\frac{BP}{AP} = \frac{PC}{AC} \Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{7}{15} \Rightarrow 6 \times 15 = 12 \times 7 \Rightarrow 90 = 84$
 ∴ محيط $\triangle PAB = 10 = AP + BP + AB \Rightarrow 10 = 12 + 6 + AB \Rightarrow AB = 10 - 18 = -8$

$10 = 3 \times 7 + 9 + 5 \Rightarrow 10 = 21 + 14 = 35$
 $\therefore 35 = 2 \times 7 = 14 \Rightarrow 14 = 2 \times 7 = 14$
 $\therefore 14 = 2 \times 7 = 14$

الإبداع في الرياضيات

الکلمہ :- مض Δ سس ب



(c) $\leftarrow \frac{5P}{55} = \frac{2P}{55} \therefore$

$$\# \overline{50} // \overline{55} \therefore \frac{\overline{50}}{\overline{55}} = \frac{50}{55} \therefore$$


الطه: آ و نيف د ب ج ٦ ب و نيف د ب ج

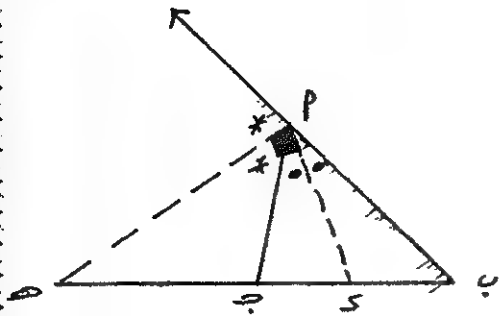
$$\frac{dp}{ds} = \frac{sp}{ps} \therefore \text{if } p > \text{then } \frac{dp}{ds} > 0$$

من ملحوظة :-
مصففات زوايا المثلث تقاطع
جميعها في نقطة واحدة

(د) من الشكك المقابل :-

رسم "ملاحظات هامة"

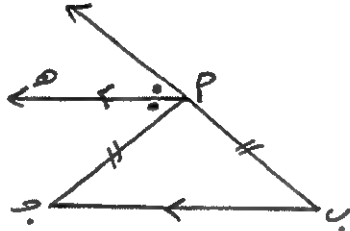
① في الشكل المقابل :- إذا كان P ، P ينصف الزاوية P والزاوية الخارجة للمثلث عند P على الترتيب فإنه :-



$$\frac{BP}{PC} = \frac{BP}{PC} \quad \text{و} \quad \frac{BP}{PC} = \frac{BP}{PC} \quad \therefore \frac{BP}{PC} = \frac{BP}{PC}$$

:- القاعدة بقدر تنقسم صدر الداخل في P و صدر الخارج في P بنفس النسبة $(BP:PC)$

وبلا حظ أنه :- المنصف الداخلي والخارجي P ، P متعامدان أي 90°



② في الشكل المقابل :- إذا كان P ينصف الزاوية الخارجة

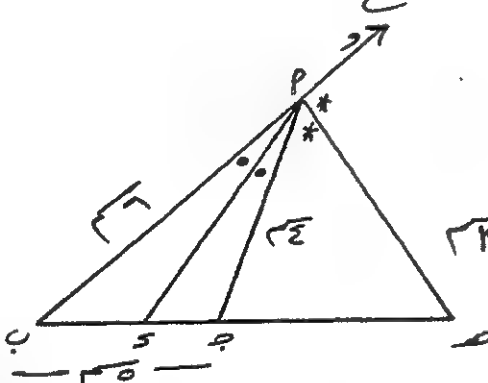
للمثلث P عند P حيث P وكان $P = BP$

فإنه $P \parallel BC$

أي أنه المنصف الخارج للزاوية رأس مثلث متساوي الساقين يكون موازيًا للقاعدة

مثال ① :- P BP مثلث فيه $P = BP$ ، $P = BP$ ، $P = BP$ ، رسم P ينصف P

ويقطع P في P ورسم P ينصف P الخارجة ويقطع P في P P P



الكل :- P ينصف P P P

$$\frac{P}{P} = \frac{P}{P} \Leftrightarrow \frac{P}{P} = \frac{P}{P}$$

$$P = P \Leftrightarrow P = P \Leftrightarrow P = P$$

$$P = P = P = P$$

P ينصف P P الخارجة

$$\frac{P}{P} = \frac{P}{P} \Leftrightarrow \frac{P}{P} = \frac{P}{P}$$

$$P = P$$

$$P = P = P = P$$

مكتبة وسام
شوق شارع حسني مبارك خلف الثانوية بنات
01004423597.3943035

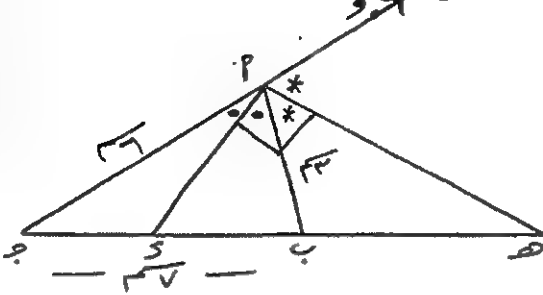
مثال ٧: $\therefore P$ ب ج مثلث فيه $P = 60^\circ$ ، $B = 70^\circ$ ، $C = 50^\circ$. رسم P كـ منتصف BC .

ويقطع PA في D ورسم AD منتصف BC في D .

(١) اثبت أن AD متوسط في $\triangle ABC$.

(٢) أوجد الزاوية $\angle BPD$ بمساعدة $\angle BPD$ و $\angle BPD$.

الحل: $\therefore P$ كـ منتصف BC .



$$\frac{7}{14} = \frac{AD}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{14} = \frac{AD}{28} \Rightarrow AD = 14$$

$$AD = 14 \Rightarrow AD = 14 \Rightarrow AD = 14$$

$$\therefore AD = 14 \Rightarrow AD = 14 \Rightarrow AD = 14$$

$$\therefore P \text{ كـ منتصف } BC \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{AD}{28} \Rightarrow AD = 14$$

$$\Rightarrow AD = 14 \Rightarrow AD = 14 \Rightarrow AD = 14$$

$$\therefore AD = 14 \Rightarrow AD = 14 \Rightarrow AD = 14$$

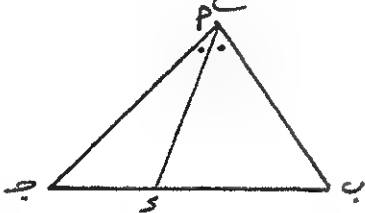
$$\therefore AD = 14 \Rightarrow AD = 14 \Rightarrow AD = 14$$

إيجاد طول المثلث الداخلي والمثلث الخارجي من زاوية رأس مثلث:

قوله مشهور:

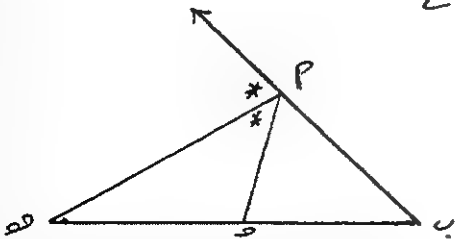
إذا كان P كـ منتصف BC في $\triangle ABC$ من الداخل ويقطع PA في D .

$$PA \times PD = PB \times PC$$

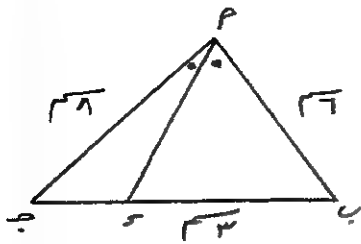


من ملاحظة: إذا كان P كـ منتصف BC في $\triangle ABC$ من الخارج ويقطع PA في D .

$$PA \times PD = PB \times PC$$



جميل غالي السيد



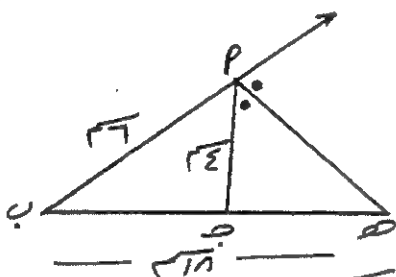
مثال ٨ :- في الشكل المقابل :-

أوجد طول AP

الحل :- $AP > BP$..

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AP}{7} = \frac{13}{10} \Rightarrow AP = \frac{13 \times 7}{10} = 9.1$$

$$\therefore AP = 9.1 = \sqrt{10^2 - 3^2} = \sqrt{100 - 9} = \sqrt{91} = 9.5396 \approx 9.54$$



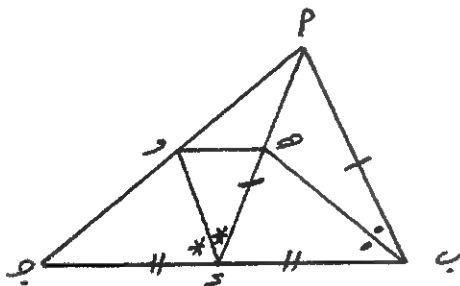
مثال ٩ :- في الشكل المقابل :-

أوجد طول AP

الحل :- $AP > BP$..

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AP}{7} = \frac{13}{10} \Rightarrow AP = \frac{13 \times 7}{10} = 9.1$$

$$\therefore AP = 9.1 = \sqrt{10^2 - 3^2} = \sqrt{100 - 9} = \sqrt{91} = 9.5396 \approx 9.54$$



مثال ١٠ :- في الشكل المقابل :-

اثبت أنه $AP \parallel BC$

الحل :- $AP > BP$..

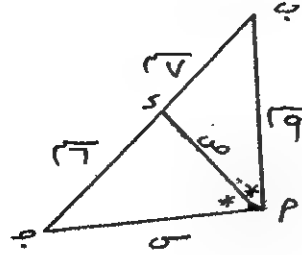
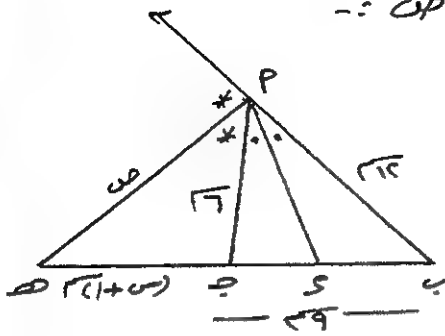
$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AP}{7} = \frac{13}{10} \Rightarrow AP = 9.1$$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AP}{7} = \frac{13}{10} \Rightarrow AP = 9.1$$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AP}{7} = \frac{13}{10} \Rightarrow AP = 9.1$$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AP}{7} = \frac{13}{10} \Rightarrow AP = 9.1$$

* تدريبات * من كل من الاشكال الآتية أوجد قيمة OP :-



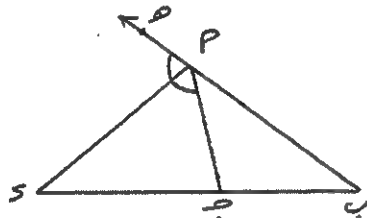
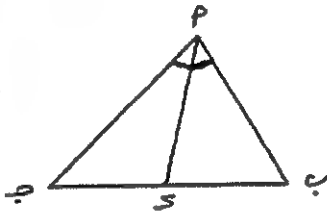
عكس نظرية (٣) :- من الشكل المقابل :-

• إذا كانت S و P ب.ج (شكل ١) بحيث $\frac{PS}{SP} = \frac{BS}{SB}$

∴ P هي منتصف BC ج

• إذا كانت S و P ب.ج ، $S \neq B$ (شكل ٢)

بحيث $\frac{PS}{SP} = \frac{BS}{SB}$ ∴ P هي منتصف BC ج



مثال (١١) :- من الشكل المقابل :- تكون P هي

انتهت أنه يكون منتصف BC ج

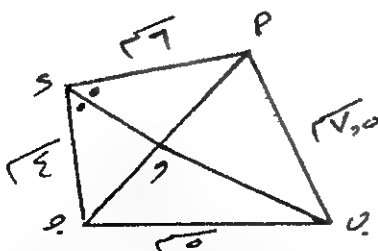
الحل :- من ΔSP ج

∴ تكون P هي منتصف BC ج ∴ $\frac{SP}{PS} = \frac{BP}{PB}$

∴ $\frac{1}{4} = \frac{BP}{PB} \leftarrow \frac{2}{3} = \frac{BP}{PB} \leftarrow (١)$

من ΔP ج ∴ $\frac{1}{4} = \frac{BP}{PB} \leftarrow \frac{2}{3} = \frac{BP}{PB} \leftarrow (٢)$

من (١) و (٢) يتبع أنه $\frac{BP}{PB} = \frac{BP}{PB}$ ∴ P هي منتصف BC ج #



* تدريبات * من الشكل المقابل :- تكون P هي

انتهت أنه يكون منتصف BC ج

الابداع في الرياضيات

مثال (١٤) :- دائرة م ممهة على سطح من الخارج في P . يتم مستقيم يوازي ممه
فقطع الدائرة م في ب ، ج ، والدائرة ن في د ، هـ على الترتيب . فإذا تقاطع
بم هـ في النقطة و : أثبت أنه P وسيفضل ح مم و ن .

$P_N = 146$ "الضمانات" $P_S = 144$ ∴

$$\frac{P_F}{P_N} = \frac{P_F}{P_N} \Leftarrow \frac{P_N}{P_N} = \frac{P_F}{P_F} \Leftarrow \textcircled{1}$$

$P_N > P_F \therefore$

الحل :- :- AP نصف دایره

(1) $\leftarrow \frac{P_c}{P_p} = \frac{200}{200} \therefore$

(c) $\leftarrow \frac{25}{2} = \frac{50}{2} \therefore 50 \parallel 50 \therefore$

$$sP = P_0 \therefore \frac{\partial s}{\partial P} = \frac{P_0}{\partial P} \leftarrow \text{C.G.T.}$$

$SP_p > SP$ $\therefore \frac{SP}{OP} = \frac{SP_p}{OP_p} \therefore$

تمارين على منصف الزوايا والجزء المتناسب

١ في الشكل المقابل: \overline{AI} ينصف Δ . أكمل:

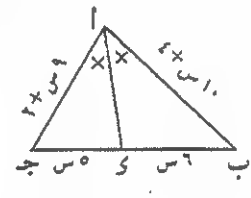
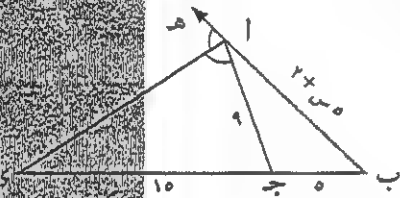
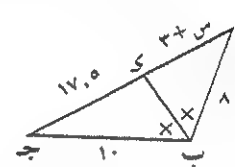
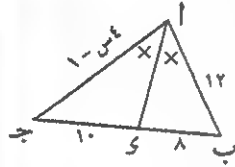
_____ = $\frac{AI}{AB}$

_____ = $\frac{BI}{AB}$

_____ = $\frac{AI}{AC}$

_____ = $\frac{CI}{AC}$

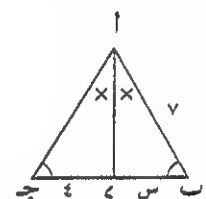
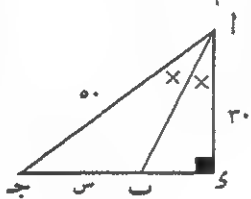
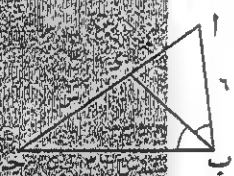
٢ في كل من الأشكال التالية، أوجد قيمة s (الطوال مقدرة بالستيمترات)



٣ ا ب ج مثلث محيطه ٢٧ سم، رسم \overline{BI} ينصف Δ ب و يقطع \overline{AC} في D .

إذا كان $AD = ٤$ سم، $BD = ٥$ سم، أوجد طول كل من AB ، BC ، AC

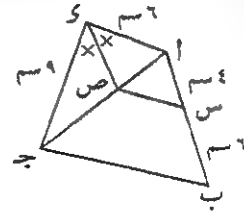
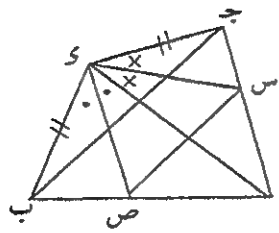
٤ في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة s ، ثم أوجد محيط ΔABC



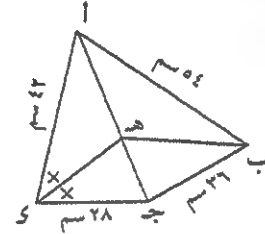
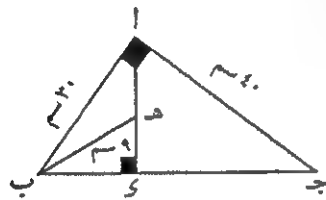
٥ ا ب ج مثلث فيه $AB = ٨$ سم، $AC = ٤$ سم، $BC = ٦$ سم، رسم \overline{AI} ينصف Δ او يقطع \overline{BC} في D ورسم

\overline{AD} ينصف Δ الخارجة ويقطع \overline{BC} في E أوجد طول كل من BE ، CE ، AE

٦ في كل من الأشكال التالية: أثبت أن $\overline{س} \parallel \overline{ب ج}$



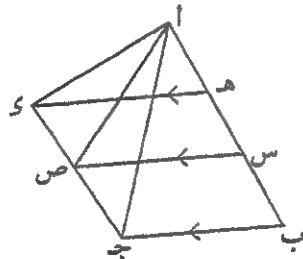
٧ في كل من الأشكال التالية: أثبت أن $\overline{ب ه}$ ينصف $\Delta ا ب ج$



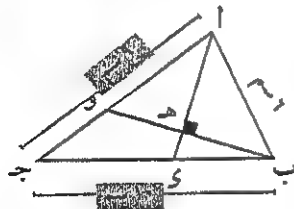
٨ في الشكل المقابل: $\overline{ه د} \parallel \overline{س} \parallel \overline{ب ج}$

$$ا د \times ب س = ا ج \times ه س$$

أثبت أن $\overline{ا ح}$ ينصف $\Delta ج ا ب$.



٩ ا ب ج مثلث $\exists \overline{ب ج}$ ، $\overline{س} \parallel \overline{ب ج}$ حيث $ج س = ا ب$. رسم $\overline{ج ه} \parallel \overline{ا س}$ ويقطع $\overline{ا ب}$ في ه، ورسم $\overline{ه و} \parallel \overline{ب ج}$ ويقطع $\overline{ا ج}$ في و أثبت أن $\overline{ب و}$ ينصف $\Delta ا ب ج$



١٠ في الشكل المقابل: ا ب ج مثلث فيه $ا ب = س م$ ، $ا ج = س م$ ،

$$ب ج = س م. \exists \overline{ب ج} \text{ بحيث } ب س = س م.$$

رسم $\overline{ب ه} \perp \overline{ا و}$ ويقطع $\overline{ا و}$ ، ا ب في ه، وعلى الترتيب.

أثبت أن $\overline{ا و}$ ينصف $\Delta ا$.

أوجد م ($\Delta ا ب و$): م ($\Delta ج ب و$)

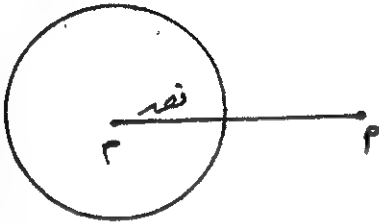
دعنا نطبيقات تناسب في الدائرة

أولاً :- قوة نقطة بالنسبة لدائرة :-

تعريف :- قوة النقطة P بالنسبة للدائرة M التي طول نصف قطرها r هو العدد

$$\text{الحقيق} \quad \text{قوة } P \quad \text{حيث} \quad \text{قوة } P = (P) = (MP)^2 - r^2$$

دعنا نلاحظه هامة :-



يملكه التبتز بموقع نقطة P بالنسبة لدائرة M

- فإذا كانه :-
- $\text{قوة } P < 0$: فانه P تقع خارج الدائرة .
 - $\text{قوة } P = 0$: فانه P تقع على الدائرة .
 - $\text{قوة } P > 0$: فانه P تقع داخل الدائرة .

مثال ① :- حدد موقع كل من النقاط P, B, C بالنسبة للدائرة M التي طول نصف قطرها

نحسب ثم احسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة في الحالات التالية :-

$$(1) \quad \text{قوة } P = 9 \quad (2) \quad \text{قوة } B = \text{مفرد} \quad (3) \quad \text{قوة } C = 7 \quad \therefore \text{الحل :-}$$

$$(1) \quad \therefore \text{قوة } P = 9 < 0 \quad \therefore P \text{ تقع خارج الدائرة .}$$

$$\therefore \text{قوة } P = (P) = (MP)^2 - r^2 = 9 \iff (MP)^2 - 16 = 9 \iff (MP)^2 = 25 \iff MP = 5$$

$$(2) \quad \therefore \text{قوة } B = 0 \quad \therefore B \text{ تقع على الدائرة .} \quad \therefore MB = r = 4$$

$$(3) \quad \therefore \text{قوة } C = 7 > 0 \quad \therefore C \text{ تقع داخل الدائرة .}$$

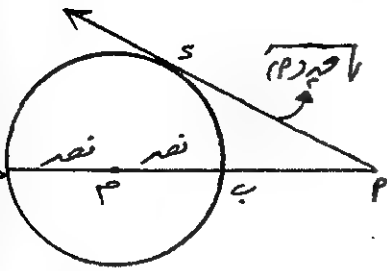
$$\therefore \text{قوة } C = (C) = (MC)^2 - r^2 = 7 \iff (MC)^2 - 16 = 7 \iff (MC)^2 = 23 \iff MC = \sqrt{23}$$

* نذكر * حدد موقع كل من النقاط P, B, C بالنسبة للدائرة M التي طول نصف قطرها r ثم احسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة في الحالات التالية :-

$$(1) \quad \text{قوة } P = 10 \quad (2) \quad \text{قوة } B = \text{مفرد} \quad (3) \quad \text{قوة } C = 2 \quad \therefore \text{الحل :-}$$

في "ملاحظة هامة" :-

① إذا وقعت النقطة P خارج الدائرة M فإنه :-

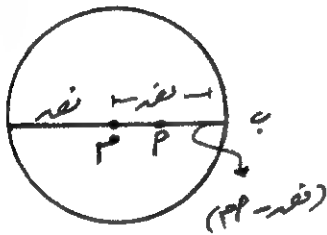


$$PM^2 - (MA)^2 = (PB)^2 - (PA)^2 \Rightarrow (PM)^2 - (MA)^2 = (PB)^2 - (PA)^2$$

$$(SP)^2 = PB \times PA =$$

∴ طول المحاس المرسوم من النقطة P للدائرة M = $\sqrt{PM^2 - (MA)^2}$

② إذا وقعت النقطة P داخل الدائرة M فإنه :-

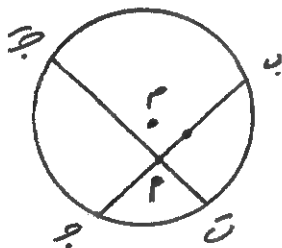


$$PM^2 + (MA)^2 = (PB)^2 - (PA)^2 \Rightarrow (PM)^2 + (MA)^2 = (PB)^2 - (PA)^2$$

$$\Rightarrow (PM)^2 = (PB)^2 - (PA)^2 - (MA)^2 = (PB - PA)^2 - (MA)^2 = (AB)^2 - (MA)^2$$

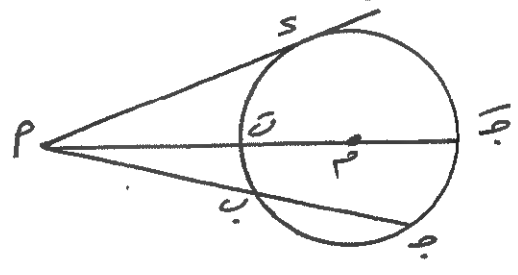
⊗ "وصيغة عامة"

(أ) P داخل الدائرة M



$$PA \times PB = PC \times PD = PM^2 + (MA)^2$$

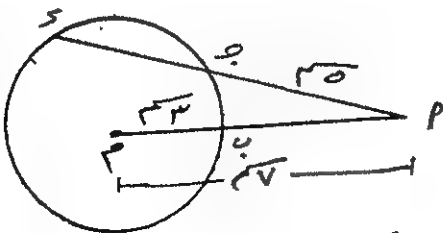
(ب) P خارج الدائرة M



$$PA \times PB = PC \times PD = PS^2 = PM^2 - (MA)^2$$

مثال ⑤ دائرة مركزها M وطول نصف قطرها 5 سم ، P تبعد عن مركزها 13 سم . رسم من P

مستقيم يقطع الدائرة خارجي ، S بحيث $P \in AS$ فإذا كان $PA = 8$ سم أوجد طول الوتر AB



$$\text{الحل :-} \quad PM^2 - (MA)^2 = (PS)^2 - (PA)^2$$

$$\therefore PM^2 - (MA)^2 = (PS)^2 - (PA)^2$$

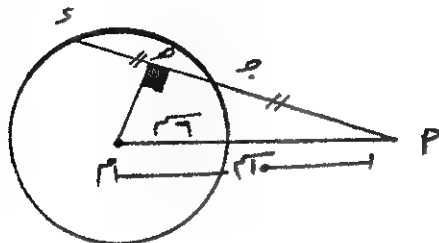
$$\therefore PM^2 - (MA)^2 = (PS)^2 - (PA)^2 \Rightarrow 13^2 - 5^2 = (PS)^2 - 8^2$$

$$\therefore PS = 10 \text{ سم} \Rightarrow AS = 18 \text{ سم}$$

مثال ٣ :- الدائرة M طول نصف قطرها ٦٠ ، النقطة P تبعد عن مركزها ١٠٠ . رسم

مستقيم يمر بالنقطة P ويقطع الدائرة من النقطتين S ، C حيث $SP = ٦٠$.

أوجد طول SC وبعد مركز الدائرة .



الحل :- نفرض $MP = ١٠٠$ ، $SP = ٦٠$.

$\therefore P$ تقع خارج الدائرة .

$$\therefore MP^2 = (SP)^2 - (MC)^2 = 100^2 - 60^2 = 36^2 \Rightarrow MC = 36$$

$$\therefore SC = 2 \times MC = 2 \times 36 = 72$$

بفرضه أنه بعد الوتر SC عن مركز الدائرة M هو ٣٦ حيث $MC \perp SC$.

$$\text{فيكون } SC = 2 \times MC = 2 \times 36 = 72$$

$$\therefore MP = SC + MC = 72 + 36 = 108$$

$$\text{من } \Delta MPC \text{ القائم في } C \Rightarrow (MP)^2 = (PC)^2 + (MC)^2$$

$$\Rightarrow (108)^2 = (PC)^2 + (36)^2 \Rightarrow PC = 100 \Rightarrow SC = 100 - 36 = 64$$

* * * تدريب * * * الدائرة N طول نصف قطرها ٨٠ . النقطة B تبعد عن مركزها ١٢٠ .

رسم مستقيم يمر بالنقطة B ويقطع الدائرة من النقطتين S ، C حيث $BS = ٨٠$.

احسب طول الوتر SC وبعد مركز الدائرة N .

مثال ٤ :- دائرة M ، نصف قطرها ٦٠ . P ، Q ، R ، S ، T ، U ، V ، W ، X ، Y ، Z . رسم

نقطع الدائرة M من S ، C حيث $SC = ٩٠$ ، $SP = ٦٠$ ، $SR = ٨٠$ ، $ST = ١٠٠$ ، $SV = ١٢٠$ ، $SW = ١٤٠$ ، $SX = ١٦٠$ ، $SY = ١٨٠$ ، $SZ = ٢٠٠$.

يس الدائرة N عند O .

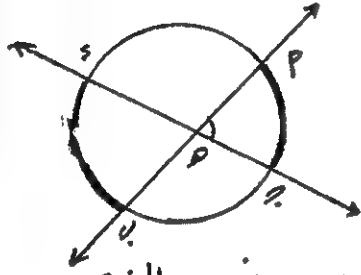
$$(١) \text{ أثبت أنه } (SP)^2 = (SO)^2 + (PO)^2 \text{ ، إذا كان } PO = ٦٠ \text{ ، احسب طول كل واحد من } P \text{ ، } Q \text{ ، } R \text{ ، } S \text{ ، } T \text{ ، } U \text{ ، } V \text{ ، } W \text{ ، } X \text{ ، } Y \text{ ، } Z$$

ثانياً: القاطع والمماس ومياسات الزوايا :-

تذكر أنه :-

① إذا تقاطع قاطعان داخل دائرة فإحدى قياسات زاويتي تقاطعهما يساوي نصف مجموع

قياس القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التي تقاطعها بالرأس

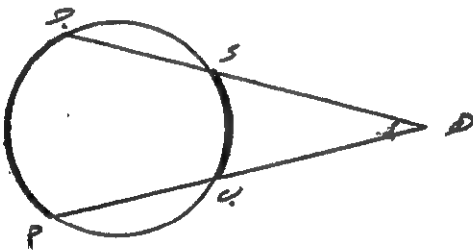


$$\vec{دب} \cap \vec{دج} = \vec{دس} \cap \vec{ده}$$

$$\text{فإنه } \frac{1}{2} [\text{م}(\widehat{سب}) + \text{م}(\widehat{جـهـ})]$$

② إذا تقاطع قاطعان داخل دائرة فإحدى قياسات زاويتي تقاطعهما يساوي نصف الفرق

الموجب بين قياس القوسين المقابلين له

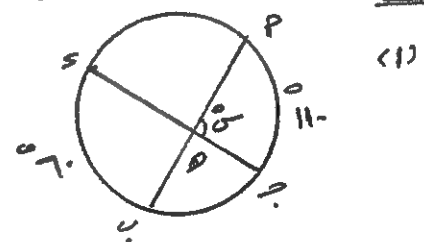
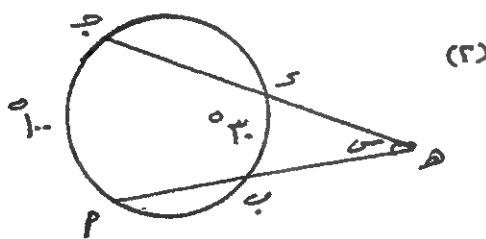


في الشكل المقابل :-

$$\vec{دب} \cap \vec{دج} = \vec{دس} \cap \vec{ده}$$

$$\text{فإنه } \frac{1}{2} [\text{م}(\widehat{سب}) - \text{م}(\widehat{جـهـ})]$$

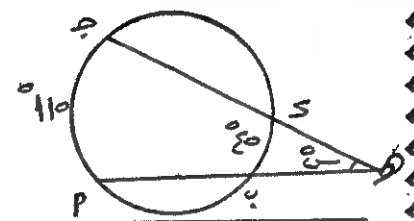
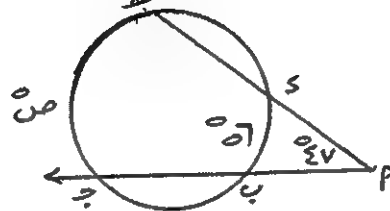
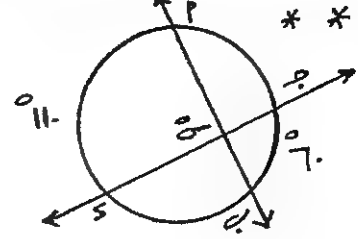
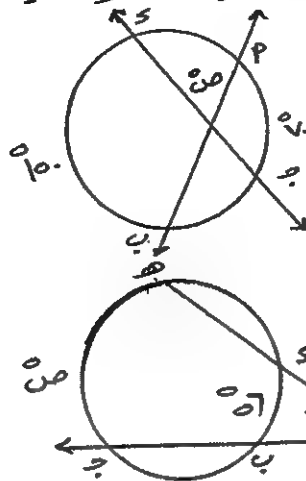
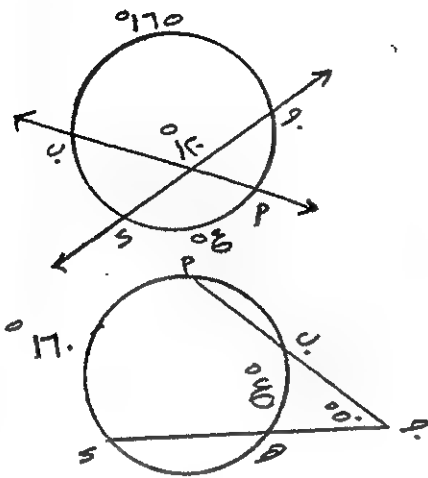
مثال ③ :- في الأشكال الآتية . أوجد قيمة س :-



الحل :- (١) $س = \frac{1}{2} [\text{م}(\widehat{سب}) + \text{م}(\widehat{جـهـ})] = \frac{1}{2} [١١٠ + ٦٠] = \frac{1}{2} \times ١٧٠ = ٨٥$

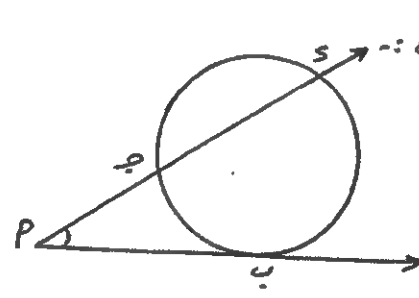
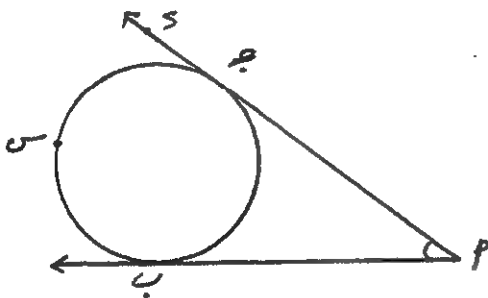
(٢) $س = \frac{1}{2} [\text{م}(\widehat{سب}) - \text{م}(\widehat{جـهـ})] = \frac{1}{2} [٣٠ - ١٠] = \frac{1}{2} \times ٢٠ = ١٠$

* تدرسي * في كل من الأشكال الآتية . أو جد قيمة الزوايا المستعمرة في القياس .



تمرين مشهور :-

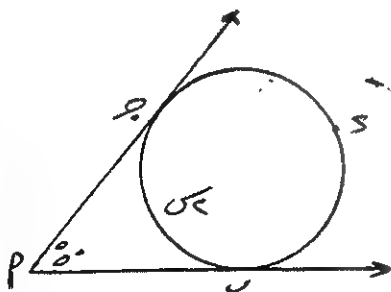
القاطع والمماس (أو المماس)، لدائرة المتقاطعة خارج الدائرة يكون قياس زاوية تقاطعها مساوياً لنصف الفرق الموجب بين قياس القوسين المقابلين لها.



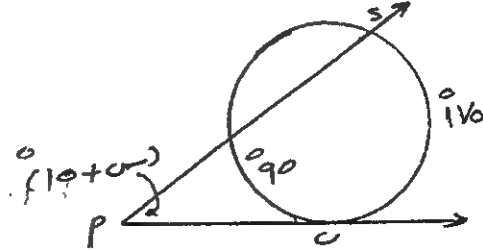
$$\angle P = \frac{1}{2} [\text{م (بج) - م (أج)}]$$

$$\angle P = \frac{1}{2} [\text{م (بج) - م (أج)}]$$

مثال ٦ :- من الأشكال الآتية أوجد قيمة س .



(٢)



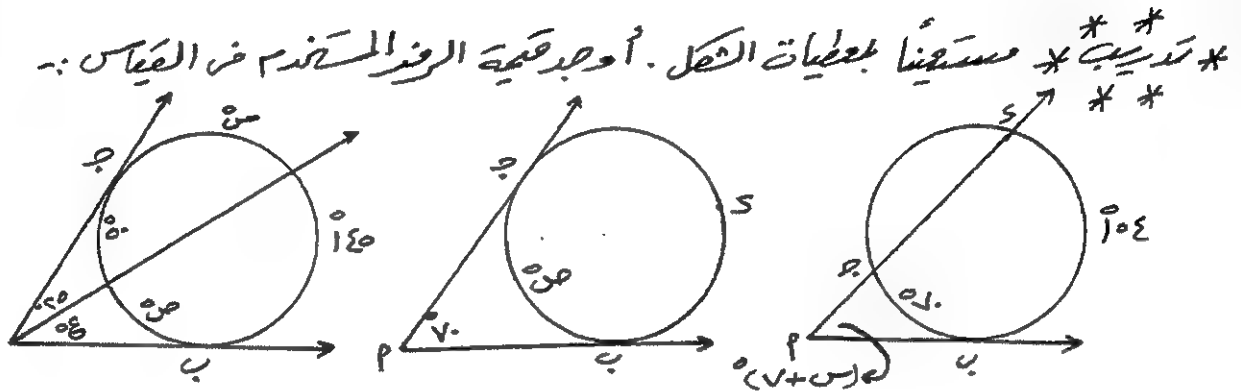
(١)

الحل :- (١) $\angle P = \frac{1}{2} [90 - 170] = \frac{1}{2} (-80) = -40$ $\Rightarrow \angle P = 40$

$$(٢) \quad \frac{1}{2} = 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad [٣٦٠ - (٣٦٠ - ٣٦)] \cdot \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{1}{2} = 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad [٣٦٠ - ٣٦] \cdot \frac{1}{2} = 0.5$$

$$٣٦٠ - ٣٦ = ٣٢٤ \quad \Leftrightarrow \quad ٣٢٤ \cdot \frac{1}{2} = ١٦٢ \quad \Leftrightarrow \quad ٣٢٤ = ٢ \cdot ١٦٢$$



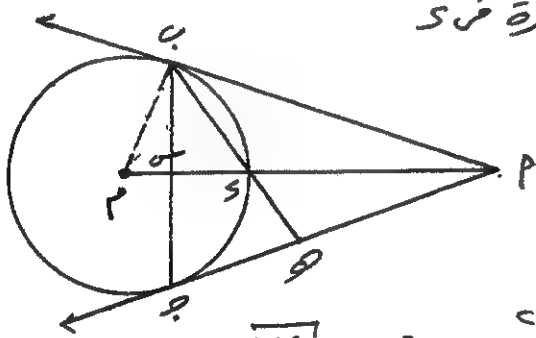
مثال ٥ :- من الشكل المقابل :- دائرة طول نصف قطرها ٩ سم

نقطتي P و Q على دائرة مركزها O. يقطع الدائرة من S

نقطتي P و Q. رسمت من S فقطع P و Q من S

إذا كان طول PQ = ١٤٤. أوجد :-

(١) طول PS (٢) طول OS



الحل :- \therefore $PS = PQ = 144 \Rightarrow PS = 144 \Rightarrow OS = \sqrt{PS^2 - r^2} = \sqrt{144^2 - 9^2}$

نصل بـ OS نصف قطر. \therefore PS عمود على OS \therefore PS عمود على OS

\therefore PS عمود على OS \therefore PS عمود على OS

من ΔPOS القائم عند O $\therefore PS^2 = OS^2 + r^2 \Rightarrow OS^2 = PS^2 - r^2 = 144^2 - 9^2$

$\therefore OS = \sqrt{144^2 - 9^2} = 144$

من ΔPOS القائم عند O $\therefore PS^2 = OS^2 + r^2 \Rightarrow PS^2 = 144^2 + 9^2$

$$\Leftrightarrow PS = \sqrt{144^2 + 9^2} = 144.003 \approx 144$$

تمارين على "تطبيقات التناسب في الدائرة"

- ١٦ حدد موقع كل من النقط التالية بالنسبة إلى الدائرة م، والتي طول نصف قطرها ١٠ سم. حيث بعد كل نقطة عن مركز الدائرة.
- ١٧ و م (أ) = ٣٦ و م (ب) = ٩٦

١٨ أوجد قوة النقطة المعطاة بالنسبة إلى الدائرة م، والتي طول نصف قطرها م:

١ النقطة أ حيث أ م = ١٢ سم ، م = ٩ سم

٢ النقطة ب حيث ب م = ٨ سم ، م = ١٥ سم

٣ النقطة ج حيث ج م = ٧ سم ، م = ٧ سم

٤ النقطة د حيث د م = ١٧ سم ، م = ٤ سم

١٩ إذا كان بعد نقطة عن مركز دائرة يساوي ٢٥ سم وقوة هذه النقطة بالنسبة إلى الدائرة م، أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة.

٢٠ الدائرة م طول نصف قطرها ٢٠ سم. أ نقطة تبعد عن مركز الدائرة مسافة ١٦ سم، رسم الوتر ب ج حيث أ ب ج ، أ ب = ٢ ج. احسب طول الوتر ب ج.

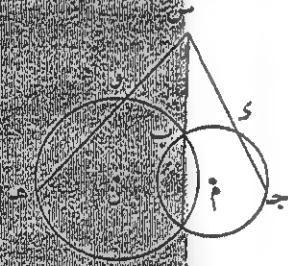
٢١ في الشكل المقابل: الدائرتان م، ن متقاطعتان في أ، ب

حيث أ ب أ ب ج د ن هـ و = {س}، س د = ٢ ج، هـ و = ١٠ سم، و ن (س) = ١٤٤.

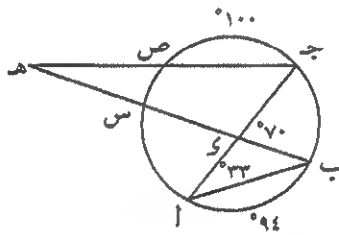
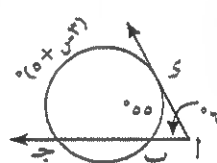
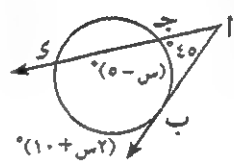
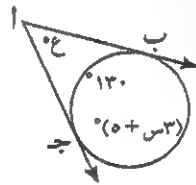
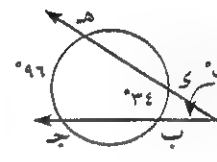
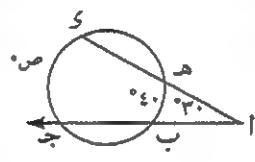
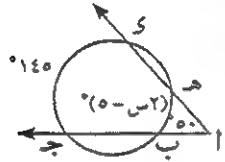
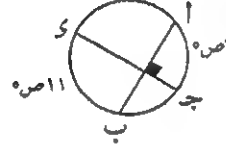
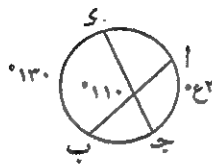
٢٢ أثبت أن أ ب محور أساسي للدائرتين م، ن.

٢٣ أوجد طول كل من س ج، س و

٢٤ أثبت أن الشكل ج د و هـ رباعي دائري.



١٦ مستعينًا بمعطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس.

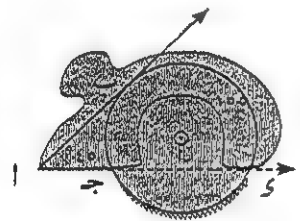


١٧ في الشكل المقابل: و $\angle AOB = 23^\circ$ ، و $\angle AOC = 70^\circ$ ، و $\angle AOB = 94^\circ$ ، و $\angle AOC = 100^\circ$ أوجد قياس كل من:

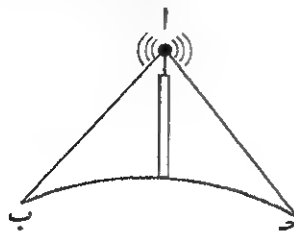
س ص

ا س

$\angle BHC$



١٨ السطح من الصناعة: منشار دائري لقطع الخشب طول نصف قطر دائرته ١٠ سم. يدور داخل حافظة حماية، فإذا كان و $\angle AOB = 40^\circ$ ، و $\angle AOC = 150^\circ$ أوجد طول قوس قرص المنشار خارج حافظة الحماية.



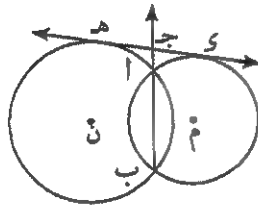
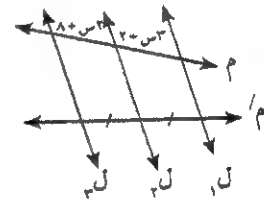
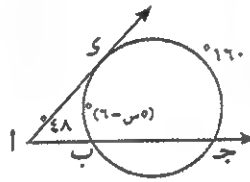
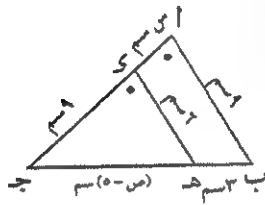
١٩ اتصالات: تتبع الإشارات التي تصدر عن برج الاتصالات في مسارها شعاعاً، نقطة بدايته على قمة البرج، ويكون مماساً لسطح الأرض، كما في الشكل المقابل. حدد قياس القوس المحصور بالماسين بفرض أن البرج يقع على مستوى سطح البحر، و $\angle AOB = 80^\circ$

تعاريف عامة

أكمل العبارات التالية:

- ١ المنصفان الداخلي والخارجي لزاوية واحدة
- ٢ منصفات زوايا المثلث تتقاطع في
- ٣ إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث، ويقطع الضلعين الآخرين فإنه
- ٤ المنصف الخارجي لزاوية رأس المثلث المتساوي الساقين قاعدة المثلث.
- ٥ إذا كانت قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م كمية سالبة، فإن نقطة تقع

٦ مستعيناً بمعطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس.



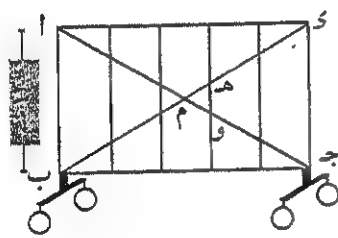
٧ دائرتان م، ن متقاطعتان في أ، ب.

هـ مماس مشترك للدائرتين م، ن عند د، هـ على الترتيب،

$$\overline{ب أ} \cap \overline{د هـ} = \{ج\}$$

أثبت أن: ب جـ محور أساسي للدائرتين.

إذا كان أ ب = ٩ سم، و(ج) = ٣٦، أوجد طول جـ أ، جـ د

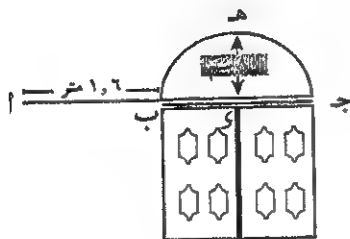


٨ يبين الشكل المقابل أحد الحواجز المرورية أ ب جـ د على شكل

مستطيل ومكون من متوازية ومتطابقة، وعلى أبعاد متساوية،

ومثبت به دعامتان أ جـ، ب د، تقطعان أحد القضبان الرأسية في

و، هـ على الترتيب فإذا كان أ ب = ١٢٠ سم أوجد طول هـ د.



٩ هندسة معمارية: من نقطة أ والتي تبعد ١,٦ مترًا عن قاعدة قنطرة

تعلو باب منزل، وجد أن قوة النقطة أ بالنسبة لدائرة قوس القنطرة

يساوي ٦,٤ متر مربع.

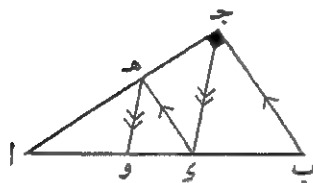
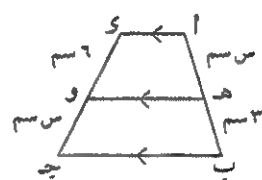
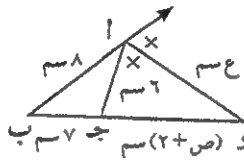
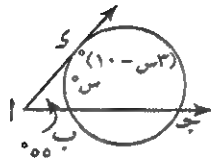
أوجد طول قاعدة القنطرة (ب جـ).

إذا كان ارتفاع القنطرة يساوي ٨٠ سم، فأوجد قوة النقطة د

بالنسبة لدائرة القنطرة وطول نصف قطرها.

اختبار الوحدة

١) مستخدماً معطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس.



٢) في الشكل المقابل: Δ أ ج ب قائمة، ب ج // د هـ

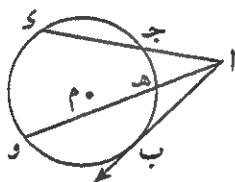
ج د // هـ و. أثبت أن:

$$او \times اب = ا هـ + هـ د$$

٣) أ ب ج مثلث، ن نقطة داخل المثلث. نصفت الزوايا أ ب، ب ن ج، ج ن أ

بمنصفات لاقط أ ب، ب ج، ج أ في د، هـ، و على الترتيب.

$$اثبت أن: \frac{اي}{وب} \times \frac{ب هـ}{هـ ج} \times \frac{ج و}{وا} = 1$$



٤) ا نقطة خارج الدائرة م، أ ب مماس للدائرة عند ب.

رسم أ ج، أ هـ يقطعان الدائرة في ج، د، هـ، و على الترتيب،

$$اج = ٤ سم، هـ و = ٩ سم.$$

١) إذا كان و = ١ أوجد طول كل من أ ب، أ هـ، ج د

٢) إذا كانت س \in ج د حيث ج س = ٢ سم أوجد و (س)، و (د).

٥) أ و متوسط في Δ ا ب ج، ج س ينصف أ ب ويقطع أ ب في س، د ص ينصف أ د ج و يقطع

أ ج في ص.

١) أثبت أن: س ص // ب ج

٢) إذا رسم د ع \perp س ص ويقطعه في ع، وكان س ع = ٩ سم، ع ص = ١٦ سم

أوجد طول كل من: د س، د ص.

اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

١٠ إذا كان $\frac{3}{4} = \frac{9}{x}$ فإن x تساوي:

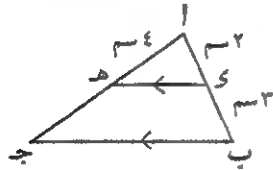
- ١٢ ☐ ١٦ ☐ ٢٧ ☐ ٨١ ☐

١١ جذرا المعادلة $x^2 + 2x - 20 = 0$ صفر هما:

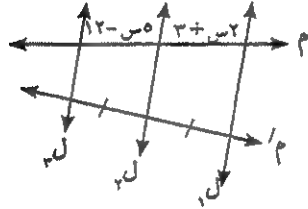
- ١٠، ٢ ☐ ٤، ٥ ☐ ٤، ٤ ☐ ٥، ٤ ☐

١٢ إذا كان $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ فإن $\angle A$ يساوي:

- ٣٠ ☐ ٦٠ ☐ ١٠٠ ☐ ١٢٠ ☐



١٣ إذا كان المستقيمان ℓ_1 ، ℓ_2 متوازيين، يقطعها المستقيمان m ، n والأطوال مقدرة بالستيمترات فإن x تساوي:

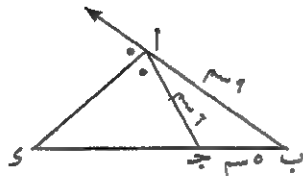


- ٥ ☐ ٣ ☐ ٧ ☐ ٢ ☐

١٤ في الشكل المقابل \overline{AO} ينصف الزاوية الخارجة

عند A فإن طول \overline{AO} يساوي:

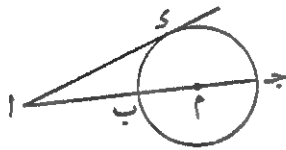
- ٥ ☐ ١٠ ☐ ١٢ ☐ ١٨ ☐



١٥ الدائرة m طول نصف قطرها ٥ سم، \overline{AO} مماس للدائرة عند D ،

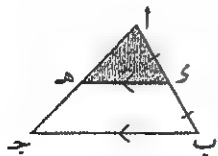
$\angle A = 12^\circ$ فإن طول \overline{AO} يساوي:

- ٧ ☐ ١٢ ☐ ١٥ ☐ ١٨ ☐



١٦ إذا كانت مساحة سطح $\triangle ABC = 16$ سم²

فإن مساحة سطح المثلث $ABD =$ _____ سم².

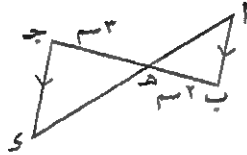


- ١٦ ☐ ٣٢ ☐ ٦٤ ☐ ١٢٨ ☐

اختبار تراكمي

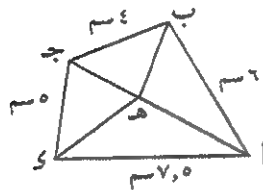
الأسئلة ذات الإجابات القصيرة:

٨ في الشكل المقابل:



$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، $\angle B = \angle H = 2^\circ$ سم، $\angle C = \angle D = 3^\circ$ سم،
أي = ١٠ سم. أوجد طول \overline{HD}

٩ في الشكل المقابل: \overline{BH} ينصف $\angle B$ ،



ويقطع \overline{AC} في H $\angle B = 6^\circ$ سم، $\angle C = 5^\circ$ سم، $\angle A = 70^\circ$ سم
 $\angle B = 4^\circ$ سم. أثبت أن \overline{BH} ينصف $\angle B$

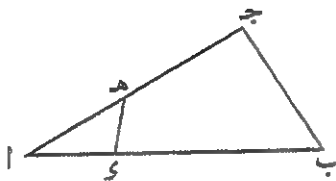
١٠ في الشكل المقابل:



\overline{AB} ، \overline{CD} وتران في الدائرة، $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{H\}$
أثبت أن $\triangle AHD \sim \triangle BHC$

التمارين ذات الإجابات الطويلة

١١ في الشكل المقابل: $\angle B = 2^\circ$ سم، $\angle C = 12^\circ$ سم،



$\angle A = 9^\circ$ سم، $\exists \overline{AD}$ حيث $\angle A = 3^\circ$ سم،

$\exists \overline{AD}$ حيث $\angle A = 4^\circ$ سم.

أثبت أن $\triangle AHD \sim \triangle BHC$

ثم أوجد طول \overline{HD} .

١٢ $\angle B = 2^\circ$ سم، $\angle C = 12^\circ$ سم، $\exists \overline{AD}$ حيث $\angle A = 3^\circ$ سم،
فإذا كان الشكل $\triangle BHC$ ورباعياً دائرياً أثبت أن $\frac{\overline{BH}}{\overline{HD}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{AD}}$.

مكتبة وسام

ش. شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات
01004423597 - 3943035

أ / جميل غالي السيد

(١٧٨)

الفصل الدراسي الأول

اختبارات عامة

من الكتاب المدرسي علي

الجبر

وحساب المثلثات

والهندسة

اختبارات عامة

(الجبر وحساب المثلثات)

الاختبار الأول

أولاً: أكمل ما يأتى

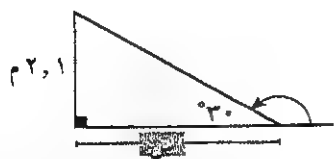
- ١) إذا كان $s = 1$ هي أحد جذرى المعادلة $s^2 - 1s - 2 = 0$ فإن $1 =$
- ٢) إشارة الدالة d حيث $d(s) = s^2 + 3$ تكون
- ٣) المعادلة التربيعية فى مجموعة الأعداد المركبة التى جذراها $-t$ ، t هى
- ٤) مدى الدالة d حيث $d(\theta) = 3$ جا θ هو
- ٥) أصغر زاوية موجبة مكافئة للزاوية التى قياسها (-84°) قياسها وتقع فى الربع

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

- ١) أثبت أن جذرى المعادلة $s^2 - 5s + 3 = 0$ حقيقيان مختلفان، ثم أوجد مجموعة الحل فى \mathbb{C} مقرباً الناتج لرقم عشرى واحد.
- ٢) أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار: جا (-30°) جتا $420^\circ + \frac{\sin 25^\circ}{\cos 65^\circ}$
- ٣) فى المعادلة $(5 - 1)s^2 + (10 - 1)s - 5 = 0$ أوجد قيمة θ فى الحالات الآتية:
أولاً: إذا كان مجموع جذرى المعادلة $= 4$
ثانياً: إذا كان أحد جذرى المعادلة هو المعكوس الضربى للجذر الآخر.
- ٤) ابحث إشارة الدالة d حيث $d(s) = s^2 + 2s - 10$ مع توضيح ذلك على خط الأعداد.

- ٢) أوجد مجموعة حل المتباينة: $5s^2 + 12s \leq 44$
- ٣) إذا كان جا $\theta = \frac{2}{5}$ حيث $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ، أوجد قيمة: جتا $(\theta - 270^\circ)$ ، ظا $(\theta + 180^\circ)$

- ٤) ضع العدد المركب الآتى فى أبسط صورة $(26 - 4i) - (9 - 20i)$ حيث $t^2 = 1$
- ٥) الربط بالرياضة: يركل لاعب كرة القدم الكرة نحو الهدف من مسافة s متراً عن حارس المرمى، فيقفز الحارس ويمسك الكرة على ارتفاع $2,1$ متراً عن سطح الأرض فإذا كان مسار الكرة يميل بزاوية قياسها 30° مع الأفقى. فأوجد لأقرب رقم عشرى واحد المسافة بين اللاعب وحارس المرمى عندما يركل اللاعب الكرة.



الاختبار الثاني

(الجبر وحساب المثلثات)

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) أبسط صورة للعدد التخيلي ٣٢ هو:
 أ) $١ - ٣٢$ ب) ٣٢ ج) -٣٢ د) ٣٢

٢) الدالة $د: [-٤, ٧]$ ← ح حيث $د(س) = ٦ - ٢س$ تكون إشارتها موجبة في الفترة:
 أ) $[-٤, ٣]$ ب) $[-٤, ٧]$ ج) $[٣, ٧]$ د) $[٧, ٣]$

٣) إذا كان جذرا المعادلة $٤س^٢ - ١٢س + ٩ = ٠$ متساويين فإن ج تساوى:
 أ) ٣ ب) ٤ ج) ٩ د) ١٦

٤) ظا $(\frac{\pi}{٣} -)$ تساوى:
 أ) $٣٦ -$ ب) $\frac{١}{٣٦}$ ج) $\frac{١}{٣٦}$ د) ٣٦

٥) القياس الدائري لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله $٢سم$ من دائرة طول قطرها $٤سم$ هو:
 أ) $(\frac{\pi}{٣})$ ب) $(\frac{\pi}{٢})$ ج) $(\frac{\pi}{٤})$ د) $(\frac{\pi}{٦})$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

١) بين نوع جذري المعادلة $س^٢ + ٩س + ٦ = ٠$ ، ثم أوجد مجموعة الحل.
 إذا كان: ٧ قتا $٢٥ =$ حيث $\frac{\pi}{٣} > ١ > \pi$. فأوجد القيمة العددية للمقدار: $ظا(١ + \pi) - ظنا(١ - \frac{\pi}{٣})$

٢) أوجد قيمتي أ، ب الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة: $(١ - ب) - (٣ + ١) = ٩ - ٧ = ت$ حيث $ت = ٢ - ١ =$
 حول قياس كل من الزوايا المكتوبة بالدرجات إلى راديان والمكتوبة بالراديان إلى درجات
 أولاً: ٢١٥° ثانياً: $\frac{\pi}{٨}$

٣) ابحث إشارة الدالة د حيث $د(س) = ٢س^٢ - ٣س + ٤$ مع توضيح ذلك على خط الأعداد الحقيقية
 إذا كانت الزاوية θ مرسومة في الوضع القياسي، حيث يمر ضلعها النهائي بالنقطة $(٤، -٣)$
 فأوجد $جا\theta$ ، $ظنا\theta$.

٤) إذا كان $(س + ٢)^٢ + (س + ١) + (س - ٤) > ٠$
 أولاً: اكتب المتباينة التربيعية في أبسط صورة. ثانياً: أوجد مجموعة حل المتباينة.

ب) إذا كان $\frac{٢}{م}$ ، $\frac{٢}{ن}$ هما جذرا المعادلة $س^٢ - ٦س + ٤ = ٠$ فأوجد المعادلة التي جذراها $(ل + م)$ ، $ل م$.

(الجبر وحساب المثلثات)

الاختبار الثالث

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١) إذا كان أحد جذري المعادلة $أس^2 + ٢س + ٥ = ٠$ معكوساً ضربياً للجذر الآخر فإن $أ$ تساوى:
 أ) ٥- ب) ٢- ج) ٢ د) ٥

٢) إشارة الدالة $د$ حيث $د(س) = ٢ - ٦س$ تكون موجبة إذا كانت:
 أ) $س < ٢$ ب) $س \leq ٢$ ج) $س > ٢$ د) $س \geq ٢$

٣) المعادلة التربيعية التي جذراها $١ + ت$ ، $١ - ت$ حيث $ت^2 = ١ - هـ$ هي:
 أ) $س^2 + ٢س + ٥ = ٠$ ب) $س^2 - ٢س + ٥ = ٠$ ج) $س^2 + ٢س - ٥ = ٠$ د) $س^2 - ٢س - ٥ = ٠$

٤) إذا كانت θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي بحيث جتا $\theta < ٠$ ، في أى ربع يقع ضلع النهاية للزاوية θ :
 أ) الأول ب) الأول أو الثاني ج) الأول أو الثالث د) الأول أو الرابع

٥) إذا كانت ٢ جتا $أ = -٣٦$ فإن أقل زاوية موجبة تحقق هذه الدالة المثلثية هي:
 أ) ٤٥° ب) ١٣٥° ج) ٢٢٥° د) ٣١٥°

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

١) إذا كان $ل$ ، $م$ جذري المعادلة $س(٢ + س + ٣) = ٥$ فأوجد المعادلة التي جذراها $ل + ١$ ، $م + ١$

٢) زاوية مركزية قياسها ٦٠° وتقابل قوساً طوله $\frac{\pi\sqrt{7}}{3}$ سم، احسب طول نصف قطر دائرتها.....

٣) ضع العدد $\frac{٢-٣}{٢+٣}$ في صورة عدد مركب. حيث $ت^2 = ١ - ١$
 إذا كان ٤ جا $أ = ٣ - ١$ أوجد $و(أ)$ حيث $أ \in [٠, \frac{\pi}{٢}]$

٤) إذا كانت $د: ح \rightarrow ح$ حيث $د(س) = -س^2 + ٨س - ١٥$
 أولاً: ارسم منحنى الدالة في الفترة $[١, ٧]$ ثانياً: عين من الرسم إشارة هذه الدالة.....

٥) إذا كان $س = ٢ + ٣ت$ ، $ص = \frac{٢-٤}{٢-١ت}$ فأوجد $س + ص$ في صورة عدد مركب.....

٦) أوجد مجموعة حل المتباينة $س^2 + ٣س - ٤ \geq ٠$

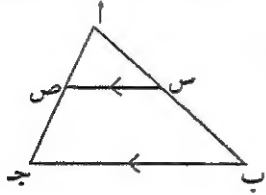
٧) إذا كان $\tan \alpha = \frac{٢}{٤}$ حيث $١٨٠^\circ < \alpha < ٢٧٠^\circ$ فأوجد قيمة: جتا $(٣٦٠^\circ - \alpha)$ - جتا $(٩٠^\circ - \alpha)$ (ب)

الاختبار الرابع

(الهندسة)

أولاً: أكمل

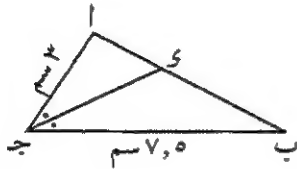
- ١) إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية، فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون
 ٢) النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين هي ٣ : ٥، إذا كانت مساحة سطح المثلث الأول ٣٦ سم^٢ فإن مساحة سطح المثلث الثاني تساوي



٣) في الشكل المقابل: إذا كان $\overline{AS} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{BS} = ٨$ ، فإن:

١) $\overline{AS} : \overline{BS} = \overline{AB} : \overline{BC}$:

٢) محيط $\triangle ASB$: محيط $\triangle ABC = \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AS} : \overline{BS}$:

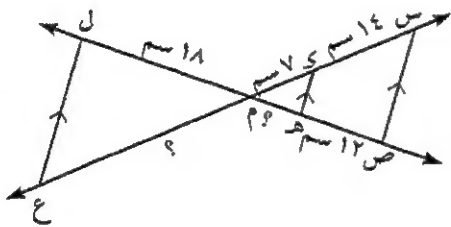


٤) في الشكل المقابل: إذا كان \overline{AD} ينصف $\angle A$ ،

أجـ = ٣ سم، بـ جـ = ٧,٥ سم، فإن $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{BC}$:

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية

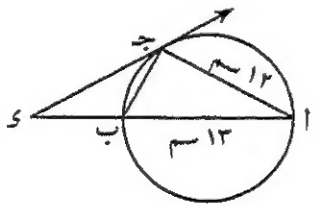
- ١) أوجد قوة النقطة أ بالنسبة إلى الدائرة م التي طول نصف قطرها ٣ سم، $\overline{AM} = ٤$ سم.
 ٢) رسم مهندس معماري مخططاً لقطعة أرض مستطيلة الشكل، طولها ضعف عرضها، ومساحتها ٢٠٠ متر^٢ بمقياس رسم ١ : ٢٠٠، أوجد طول قطعة الأرض في المخطط.



٣) في الشكل المقابل: $\overline{AS} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{BS} = ١٤$ ، $\overline{CS} = ١٨$ ، أوجد:

أولاً: طول \overline{AB}

ثانياً: طول \overline{AC}



٤) في الشكل المقابل: \overline{AB} قطر في الدائرة،

\overline{CD} مماس للدائرة عند جـ، أجـ = ١٢ سم، أب = ١٣ سم. أثبت أن:

١) $\triangle CDB \sim \triangle CDA$

٢) أوجد طول \overline{CD} لأقرب سم

٣) أوجد مساحة $\triangle ABC$

٥) أب جـ مثلث قائم الزاوية في أ، فيه أب = ٢٠ سم، أجـ = ١٥ سم، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ بحيث كان بـ د = ١٠ سم،

رسم أهـ \perp بـ جـ ويقطع بـ جـ في هـ، ومن د رسم د و \parallel بـ أ ويقطع أهـ في و.

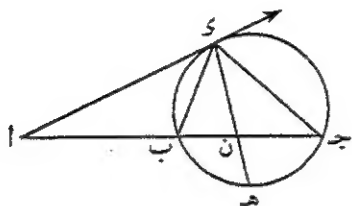
أثبت أن جـ و ينصف $\angle C$

الاختبار الخامس

النسبة بين مساحتي سطحين متشابهين كالنسبة بين

٢٠ يتشابه المضلعان إذا كان

③ في الشكل المقابل أكمل:



$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2} \right) = -\frac{2}{s^3}$

يٰۤاَيُّهَا النَّاسُ خُذُوا زِينَتَكُمْ ۚ كُلُّ مَسْجِدٍ وَطَرِيقٍ يُخْرِجُكُم مِّنَ الْمَسْجِدِ فَخُذُوا زِينَتَكُمْ ۚ هٰذَا ذِكْرُكُمْ لَعَلَّكُمْ تَذَكَّرُونَ

Δ ~ ۱۵ Δ 

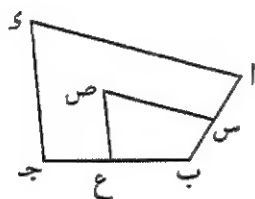
ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

أوجد قوة النقطة ب بالنسبة إلى الدائرة م، التي طول نصف قطرها ٨ سم، ب م = ٥ سم

ب) في الشكل المقابل:

أولاً: إذا كان المضلع أب ج د ~ المضلع س ب ع ص

فأثبت أن: $\overline{CS} // \overline{AU}$.



ثانيًا: إذا كان محيط المضلع AB جـ $= ١٤$ سم،


محيط المضلع س ب ع ص = ١٠ سم،

طول س ب = ۲ سم، فأوجد طول ا ب

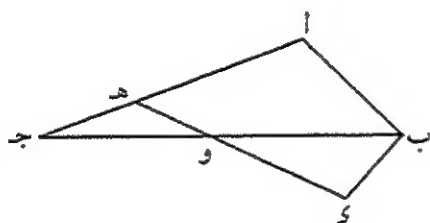
② في الشكل المقابل: $أب = ٦$ سم، $بج = ١٢$ سم،

جا = ۸ سم، وج = ۲ سم، ی ب = ۵، ۴ سم، ی و = ۶ سم.

أثبت أن:

 Δ اب ج ~ Δ ی ب و

۳) Δ هرجه متساوی الساقین.



٢) س ص ع مثلث، نصفت زاوية ص بمَنصف قطع بين ع في م، ثم رسم ن م // ص ع فقطع س ص في ن.

أثبت أن: $\frac{س\text{ ص}}{ص\text{ ع}} = \frac{س\text{ ن}}{ص\text{ ن}}$ ، وإذا كان $س\text{ ص} = ٦\text{ سم}$ ، $ص\text{ ع} = ٤\text{ سم}$ ، فأوجد طول $س\text{ ن}$.

٤٠) أ ب ج مثلث قائم الزاوية في أ. رسم $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ فقطعها في د.

رسم المثلثان المتساويا الأضلاع أب هـ ، جـ أو خارج المثلث أب جـ

أثبت أن:

① الشكل الرباعي أ ب هـ ~ الشكل الرباعي ج د أ و.

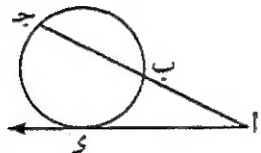
$$\frac{\text{مساحة سطح الشكل أ ب هـ}}{\text{مساحة سطح الشكل ج د أ و}} = \frac{\text{بى}}{\text{جى}}$$

(الهندسة)

الاختبار السادس

أولاً: أكمل:

- ١) إذا رُسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث، و يقطع الضلعين الآخرين فإنه
 ٢) في الشكل المقابل: إذا كان $\overline{أى}$ مماس للدائرة عند $ى$ ، فإن:

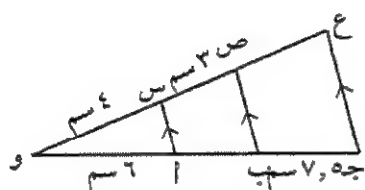


- أولاً: $أج \times أب =$
 ثانياً: إذا كان $أج = ٨$ سم، $أب = ٢$ سم، فإن $أى =$
 ثالثاً: إذا كان $أب = ب ج$ ، $أى = ٣٦$ سم، فإن $أج =$

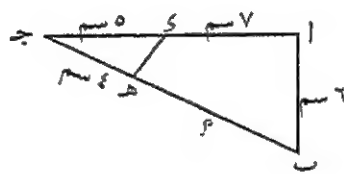
ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

- ١) إذا كانت النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين تساوى ١٦ : ٤٩، فما النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما؟ وما النسبة بين محيطيهما؟

- ٢) دائرتان متقاطعتان فى $أ$ ، $ب$ رسم مماس مشترك يمسانهما فى $س$ ، $ص$.
 إذا كان $\overline{أب} \cap \overline{س ص} = \{ج\}$ أثبت أن $ج$ منتصف $\overline{س ص}$.

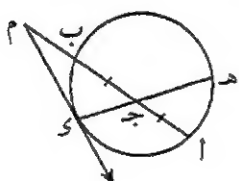


- ٢) فى الشكل المقابل: $\overline{أس} // \overline{ب ص} // \overline{ج ع}$ ،
 و $أ = ٦$ سم، $وس = ٤$ سم، $س ص = ٣$ سم،
 $ب ج = ٥$ سم، ٧ سم. أوجد طول كل من $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ع ص}$

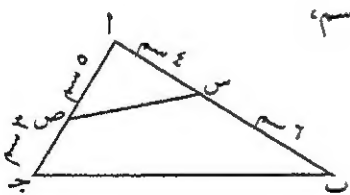


- ٣) فى الشكل المقابل:
 $\triangle ج د ه \sim \triangle ج ب ا$
 باستخدام الأطوال الموضحة على الرسم
 أوجد طول كل من $\overline{ب ه}$ ، $\overline{و ه}$.

- ٤) أوجد قوة النقطة ج بالنسبة إلى الدائرة م التى طول نصف قطرها ٦ سم، $ج م = ٦$ سم



- ٥) فى الشكل المقابل: $\overline{أب} \cap \overline{و ه} = \{ج\}$ ،
 $ج ا = ١$ سم، $ج ب = ٢$ سم، $ج د = ٢$ سم، $ج ه = ٨$ سم،
 $م و$ مماسة للدائرة. $م ب = \frac{١}{٢}$ سم. أوجد طول $\overline{م و}$.



- ٦) فى الشكل المقابل: $أب ج$ مثلث، فيه $س \in \overline{أ ب}$ بحيث كان $اس = ٤$ سم،
 $س ب = ٦$ سم، $ص \in \overline{أ ج}$ بحيث كان $أص = ٥$ سم، $ص ج = ٣$ سم.
 أثبت أن: $\triangle اس ص \sim \triangle أج ب$
 الشكل $س ب ج$ $ص$ رباعى دائرى.
 إذا كانت $م$ ($\triangle اس ص$) = ٨ سم^٢. أوجد مساحة سطح المضلع $س ب ج$ $ص$.

مكتبة وسام
 شربون، شارع حسني مبارك، خلف الثانوية بساتين
 01004423597.3943035